Готовимся к олимпиадам

Сборник задач
для учащихся 5-6 классов

Введение

"Крупное научное открытие дает решение крупной проблемы, но и в решении любой задачи присутствует крупица открытия. Задача, которую вы решаете, может быть скромной, но если она бросает вызов вашей любознательности и заставляет вас быть изобретательным и если вы решаете ее собственными силами, то вы сможете испытать ведущее к открытию напряжение ума и насладиться радостью победы". (Д.Пойа)

Решение задач занимает в математическом образовании огромное место. Умение решать задачи является одним из основных показателей уровня математического развития, глубины усвоения учебного материала по любой математической дисциплине. Понятно, что научиться решать все без исключения задачи невозможно. В математике известны задачи, которые ученые уже много лет решают и не могут получить результатов. Но если говорить о стандартных, типовых, "эталонных" задачах алгебры, математической логики, геометрии, математического анализа и областей математики, то каждый изучающий эти дисциплины в принципе может научиться их решать. Конечно, и здесь может встретиться задача, которую с ходу не решить. Необходимо будет посидеть над ней, поработать, но в принципе любая такая задача может быть решена.

Современный этап развития общества резко обострил проблему выявления одаренных школьников, создания условий для их развития и наиболее целесообразного использования их способностей. Поиск одарённых личностей должен идти непрерывно, начиная со школы. Наиболее распространённой формой отбора одаренных детей являются математические олимпиады.

Успешное выступление на олимпиаде предполагает:

а) психологическую подготовку школьника к выполнению нестандартных заданий;

б) математическую одарённость;

в) умение собраться, сконцентрироваться на выполнение нескольких заданий за определённый промежуток времени;

г) математическую грамотность участника, умение строго записать решение задачи;

д) успешное овладение школьником изучаемых разделов математики.

Успех на олимпиаде связан не только со способностями, но и со знанием классических олимпиадных задач. Поэтому к олимпиаде надо серьёзно готовиться.

Устойчивый интерес к математике начинает формироваться в 14-15 лет. Но это не происходит само собой: для того, чтобы ученик 7 или 8 класса начал всерьез заниматься математикой, необходимо, чтобы на предыдущих этапах он почувствовал, что размышления над трудными, нестандартными задачами могут доставлять радость.

Решение олимпиадных задач позволяет учащимся накапливать опыт в сопоставлении, наблюдении, выявлять несложные математические закономерности, высказывать догадки, нуждающиеся в доказательстве. Тем самым создаются условия для выработки у учащихся потребности в дедуктивных рассуждениях.

У каждого учителя есть свои копилки (папки) с олимпиадными задачами, которые собираются на протяжении всей трудовой деятельности педагога. Очень часто просто не хватает времени оформить эту имеющуюся информацию в единый задачник или справочник по решению олимпиадных задач. В данной работе сделана попытка собрать из разных источников достаточное число олимпиадных задач, для решения которых должно хватить сведений, полученных в ходе изучения математики в первых пяти классах. Конечно, невозможно собрать все имеющиеся интересные задачи, доступные для учащихся 5-6 классов. Но для преподавателя важно иметь пособие, в котором представлены идеи решений и которое позволило бы провести цикл занятий олимпиадного кружка, не прилагая титанических усилий для подготовки к занятиям.

Мной предпринята попытка составления такой разработки, которую можно было бы использовать при непосредственной подготовке к занятиям. При этом порядок изложения тематических разделов может варьироваться в зависимости от целей учителя. При подготовке учеников к олимпиадам, каждый учитель, ставит перед собой цель - научить их решать задачи. Конечно, учитель может остановиться на показе способов решения определённых видов задач, после чего ученики начинают применять эти алгоритмы к другим задачам. Но, наиболее правильным, наверное, путём обучения будет разумное сочетание самостоятельной работы учеников с обучением их общим методам и подходам.

Как я использую данный материал для подготовки учащихся к олимпиадам?

В домашнее задание включаю задачи, требующие нестандартного мышления. Провожу собеседование и предлагаю всем желающим заниматься решением задач во внеурочное время. Часто повторяю своим ученикам *слова Д.Пойа: «Чтобы научиться решать задачи, надо их решать».*

В любом классе есть более сильные ученики, которые выполняют на уроке запланированный материал быстрее других. Для этих учащихся и предназначены задачи. Каждая глава находится в отдельной папке и если ученик выполнил все запланированные задания, он может в ходе урока использовать данный материал для работы. Некоторые обучающиеся берут папки домой для дополнительной, более тщательной проработки.

На дополнительных занятиях, во внеурочное время, я стараюсь обучать общему подходу и основным методам решения задач, а именно:

- разбиению задачи на подзадачи преобразование задачи;
- кодированию объектов задачи;
- введению и построению вспомогательных элементов.

Рекомендую учащимся читать дополнительную литературу по теории, вести поиск задач, решать их самостоятельно. Учиться надо не тому, что легко получается. Ценно ваше напряжение сил. Особенно важно, чтобы ребята знали общую идею, лежащую в основе всех методов и способов решения задач: решая новую задачу, сведи её к одной или нескольким ранее решенным задачам.

В заключение опишу несколько методических приемов, которые я использую при подготовке учащихся к конкурсам и олимпиадам.

Погружение: индивидуальная работа ученика при поиске возможного решения поставленной задач.

Обмен опытом: работа в двойках, обмен и критика возникших идей.

Мозговой штурм: групповое обсуждение решений.

Подсказка: беглое знакомство с авторским решением, с последующим самостоятельным решением.

Консультации: консультация у старших и более опытных товарищей.

Консультация преподавателя.

Используя различные формы в работе с учащимися, вовлекая в олимпиадное движение, прививая и воспитывая определенные качества мы делаем одно общее дело - растим **творческую** личность.

Рекомендации участнику олимпиады:

1. Внимательно изучи текст предложенных задач.

2. Приступай к решению той задачи, которая кажется тебе более доступной.

3. Помни: на олимпиаде «лёгких» задач не бывает. Ищи «изюминку»!

4. Если задача вызывает трудности, попробуй упростить её условие, посмотреть частные или предельные случаи.

5. Решили задачу - сразу оформляйте её решение. Это поможет вам проверить логику и освободить мысли для других задач.

6. Если задача не получается, оставьте её на время и переходите к другой.

7. Задача становится проще, если её окружить родственными задачами.

Глава 1.

Числовые задачи, числовые ребусы

Ну, начнем! Когда мы доберемся до конца нашей истории, будем знать больше, чем теперь.

Ганс Христиан Андерсен

Глава 1. Числовые задачи, числовые ребусы

Миллионы людей во всех частях света любят разгадывать ребусы. И это не удивительно. “Гимнастика ума” полезна в любом возрасте. Ведь ребусы тренируют память, обостряют сообразительность, вырабатывают настойчивость, способность логически мыслить, анализировать и сопоставлять.

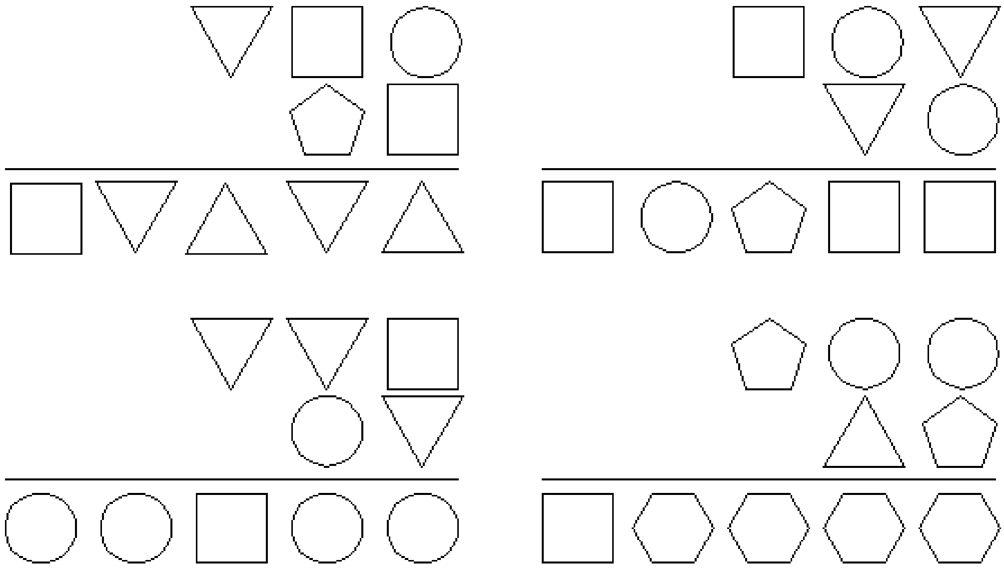
Вся наша жизнь – беспрерывная цепь игровых ситуаций. Они бывают, значительны, а бывают, пустячны, но и те, и другие требуют от нас принятия решений. Еще в Древней Элладе без игр не мыслилось гармоническое развитие личности. И игры древних не были только спортивными. Наши предки знали шахматы и шашки, не чужды им были ребусы и загадки. Таких игр во все времена не чуждались ученые, мыслители, педагоги. Они и создавали их. С древних времен известны головоломки Пифагора и Архимеда, русского флотоводца С.О. Макарова и американца С. Лойда.

Ребус – это загадка, в которой искомое слово или число изображены комбинацией фигур, букв и знаков.

Каков же принцип создания числового ребуса? Принцип достаточно прост. Каждая буква обозначает цифру, одинаковые буквы – одинаковые цифры. Вместо букв в числовых ребусах могут использоваться условные знаки. Одинаковые знаки обозначают одинаковые цифры. При использовании в ребусах знака “*”, знак “*” обозначает любую цифру от 0 до 9.

Числовые задачи часто представляют собой головоломки. Полезно перед решением такой задачи не спешить, а просто немного поиграть в них.

Эта задача с чемпионата мира по головоломкам за 2000-й год.



Одинаковым фигурам на рисунке соответствуют одинаковые цифры. Найдите эти цифры.

Решение:

Замечаем, что с учетом расположения фигур и предложенных математических действий к 1 не могут относиться следующие фигуры: квадрат, круг, перевернутый треугольник, пятиугольник.

Также замечаем, что все фигуры не могут относиться к 5 и к 0.

Затем, из результатов произведения крайних правых фигур в примерах (с учетом уже установленного выше) следует, что к 9 не могут относиться следующие фигуры: треугольник, квадрат, круг, шестиугольник (т.к. для этого необходимо, что бы разные фигуры были одновременно 3 или 7, но это противоречит условию).

Таким образом, 9-ке могут соответствовать только перевернутый треугольник или пятиугольник.

*Далее, зная, что из предложенных чисел число 3 можно получить только при произведении 7*9, заключаем, что к 3 не может относиться треугольник т.к. ни одна из крайних правых фигур в первом примере не может быть 9-кой. Аналогичным образом треугольник не является и 7-кой.*

Далее из результатов произведения 1-ого, 3-ого и 4-ого примера заключаем, что 2-кой не являются перевернутый треугольник и пятиугольник (т.к. при максимально возможной в этих примерах комбинации сотен с величиной равной 2 (298, 229, 299) мы не сможем получить какое-нибудь двузначное число даже при минимально возможном в этом случае варианте произведения (32121, 33433, 31111)).

Из 2-ого примера следует, что квадрат не соответствует цифрам 8, 7 и 6 (т.к. тогда минимально возможная комбинация произведения с этими цифрами (82388, 72377 и 62366) при делении на максимально возможный в этом случае верхний множитель (829, 729 и 629) не дает двузначного числа).

С учетом этого и уже установленного ранее, заключаем, что квадрату могут соответствовать только цифры 2, 3 или 4.

Затем из 3-его примера замечаем, что число десятков тысяч соответствует числу десятков второго множителя. Это означает, что для получения трехзначного множителя необходимо, что бы число единиц второго множителя (перевернутый треугольник) было бы больше числа его десятков. Причем это число не должно быть менее 7-ми, т.к. при минимально возможной комбинации произведения 22322 и максимально возможного второго множителя получается трехзначной число с числом сотней равной 7-ми.

Из правой части 2-ого примера следует, что если бы перевернутый треугольник был бы 7-кой, то круг являлся бы цифрой, умножая которую на 7-мь не получалась бы в числе единиц цифра менее 2-х и более 4-х (цифра не соответствующая квадрату).

Этому условию удовлетворяет цифры 2 и 6.

Однако применение этих значений в 3-ем примере не будет соответствовать его условию.

Если бы перевернутый треугольник был бы 8-кой, то круг являлся бы цифрой, умножая которую на 8-мь не получалась бы в числе единиц цифра менее 2-х более 4-х.

Этому условию удовлетворяет соответствие круга 3-м или 4-м.

Однако применение этих значений также не будет соответствовать условию 3-его примера.

Значит ***перевернутый треугольник – это цифра 9!***

Следовательно, круг – это цифра 6, 7 или 8, т.к. только при этих значениях произведение перевернутого треугольника на круг дает цифру единиц, соответствующую значению квадрата - от 2-х до 4-х.

Учитывая правую часть 3-его примера, замечаем, что и число единиц произведения квадрата (от 2-х до 4-х) на перевернутый треугольник (9-ть) должно равняться цифре круга (6, 7 или 8).

В связи с чем, у нас остается только два варианта квадрат – это 2 или 4, а круг, соответственно – это или 8 или 6.

Подставляя их в 3-ий пример, находим их значение:

круг – это цифра 8!

квадрат – это цифра 2!

Далее очень легко определить оставшиеся цифры.

При умножении в первом примере круга на квадрат получаем 16, т.е. число единиц равняется 6-ти, что соответствует треугольнику.

Значит треугольник – это цифра 6!

Продолжая эксплуатировать 1-й пример, определяем и ***пятиугольник – это цифра 3!***

«Набрасываемся» на 4-й пример и находим ***шестиугольник – это цифра 4!***

Вроде бы все.

Ответ: Квадрат – 2; круг – 8; треугольник -6; перевернутый треугольник – 9; пятиугольник – 3; шестиугольник - 4

-Числовые ребусы

Требуется расшифровать запись арифметического равенства, в котором цифры заменены буквами, причем разные цифры заменены разными буквами, одинаковые - одинаковыми. Предполагается, что исходное равенство верно и записано по обычным правилам арифметики. В частности, в записи числа первая слева цифра не является цифрой 0; используется десятичная система счисления.

Записи восстанавливаются на основании логических рассуждений. При этом нельзя ограничиваться отысканием только одного решения. Испытание нужно доводить до конца, чтобы убедиться, что нет других решений, или найти все решения. Есть математические ребусы, имеющие несколько решений.

Животноводческий ребус

Б + Б Е Е Е = М У У У

Решение:

Так как при сложении данных чисел цифра Е в разряде десятков поменялась на цифру У, то суммой однозначных чисел Б и Е является двузначное число, начинающееся с единицы. Так как помимо увеличения на единицу цифры в разряде десятков также изменилась и цифра в разряде сотен, то

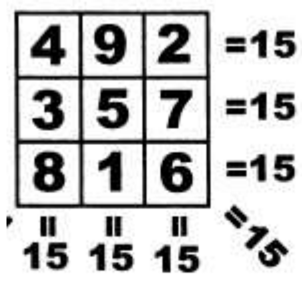
Е = 9, Б = 1, У = 0.

Ответ.

1 + 1999 = 2000.

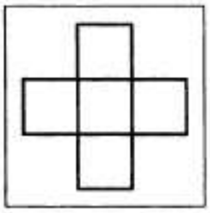
- ***Кросс - суммы***

Числа и фигуры могут объединяться в композицию. Например, в такую: девять чисел натурального ряда расставлены в клетках квадрата. Можно ли сразу сказать, что это красиво? Вряд ли. Красота здесь не внешняя, а содержательная, внутренняя. Чтобы ее понять требуется напряжение мысли, нужно посчитать суммы трех чисел в каждой строчке, в каждом столбце и по каждой из двух диагоналей. Оказывается, сумма во всех восьми случаях одна и та же, равная 15.



Именно в этой области существует большое количество занимательных задач простых по условию и полезных для ума. Для пересекающихся рядов чисел с одинаковыми суммами отечественный математик и популяризатор науки ***Борис Анастасьевич Кордемский*** *ввел определение кросс-суммы, по аналогии с кроссвордами (от английского cross – пересекаться, скрещиваться). Таким образом, кросс-суммы - это пересекающиеся ряды чисел с одинаковыми суммами. Словосочетание немного неблагозвучное из-за трех букв «с», идущих подряд. Можно было бы назвать их по-русски: числовые пересечения с одинаковыми суммами, но получается более громоздко. Кроме того, нужно отдать долг вежливости по отношению к мэтру отечественной занимательной математики, автору «Математической смекалки», на книгах которого воспитывалось поколение ваших родителей.*

Начнем с простейшего расположения чисел в одну строчку и один столбец с пересечением:



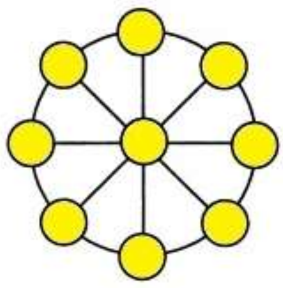
Можно ли расставить числа от 1 до 5 так, чтобы сумма трех чисел в строчке и трех чисел в столбце была одна и та же? Ответ дается в приведенной схеме:

Число 3 в центр, а по краям равноудаленные от центра пары чисел. Это не единственное решение. Сумма 1+2+3+4+5=15, нечетная. Число, стоящее на пересечении, входит как в сумму чисел строки, так и в сумму чисел столбца, и мы должны прибавить его к 15 и, поделив на два, вычислим кросс-сумму. Значит, число на пересечении обязательно нечетное, но это может быть 1, 3, 5. Отсюда получим другие решения, с суммой равной 8 или 10. Ещё возможны перестановки крайних чисел, не влияющие на сумму, но дающие дополнительные решения. Убеждаемся, что вариант с одним пересечением достаточно легкий и допускает несколько решений с различными кросс- суммами.

Задачи для самостоятельного решения:

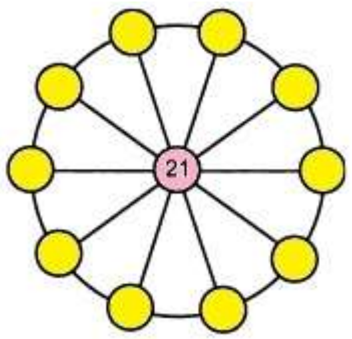
№1

Расставьте числа от 1 до 9 в кружочки фигуры так, чтобы сумма трех цифр по каждой прямой составляла 15.



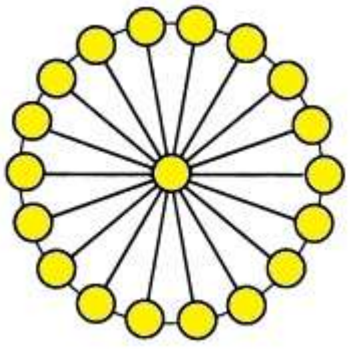
№ 2

Расставьте десять последовательных натуральных чисел в кружочки фигуры так, чтобы сумма любых трех чисел по каждой прямой, составляла 42.



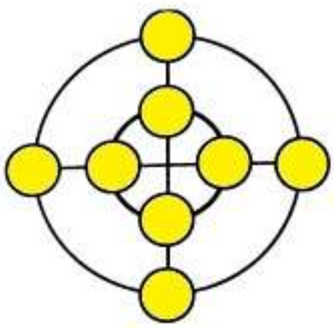
№3

Расставьте числа от 1 до 19 в кружочки фигуры так, чтобы сумма любых трех чисел на одной прямой равнялась 30.



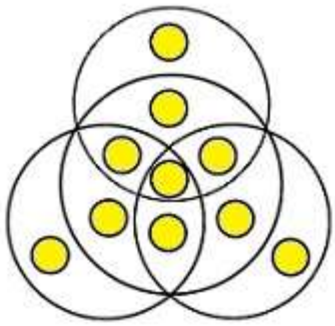
№4

Расставьте числа от 1 до 8 так, чтобы суммы чисел по прямым и окружностям были одинаковыми.



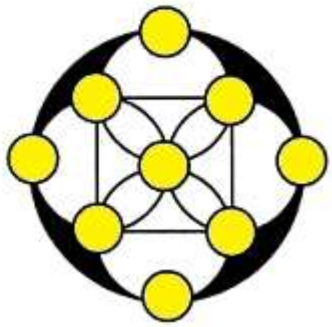
№5

Расставьте числа от 1 до 10 в маленькие кружочки так, чтобы суммы чисел в четырех больших кругах были равными.



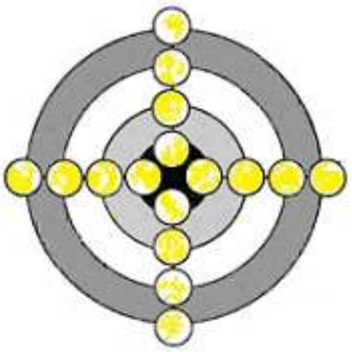
№6

Расставьте 9 натуральных последовательных чисел так, чтобы равнялись 60 суммы по 4 малым и одной большой окружности, а также в вершинах центрального квадрата.



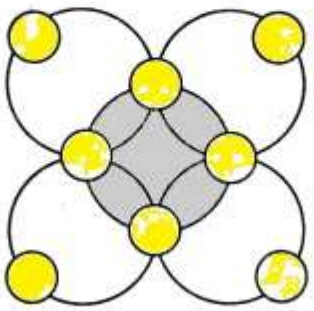
№7

Расставьте числа от 1 до 16 так, чтобы суммы по 4-м радиусам и 4-м окружностям равнялись 34.



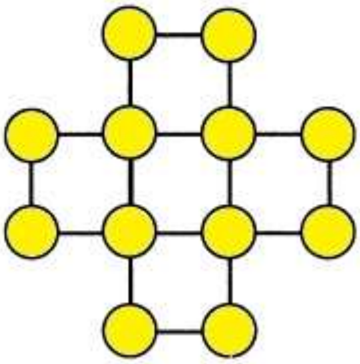
№8

Расставьте числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел на каждой окружности была одной и той же.



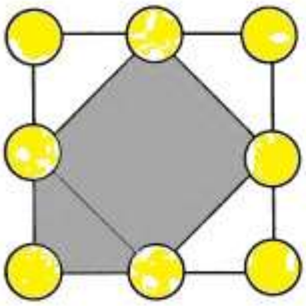
№9

Расставьте числа от I до 12 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого из пяти квадратов и по четырем прямым была одинаковой.



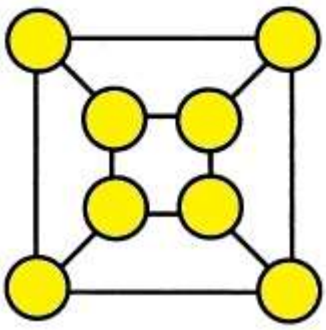
№10

Расставьте в кружках числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого белого треугольника равнялась 12, а в вершинах серого треугольника и квадрата - по 11.



№11

Расставьте числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел в вершинах каждого четырехугольника (2-х квадратов и 4-х трапеций) равнялась 18.



№12

В этом примере на умножение присутствуют все цифры от 0 до 9, причем каждая цифра встречается только однажды (цифры в промежуточных выкладках в расчет не идут). Решите этот пример. Чтобы вам было от чего отправляться, мы вписали во второй сомножитель одну цифру.

```
    X X X
   X 5
--------------
X X X X X
```

Решите ребус

№13

КТО + КОТ = ТОК

№14

ЧАЙ : АЙ = 5

№15

РОЗА + ОЗА + ЗА + А = 2000

№16

КОЛ · КОЛ = ПРИКОЛ

№17

```
  КОШКА
 +КОШКА
  КОШКА
 ------
 СОБАКА
```

КОШКА + КОШКА + КОШКА = СОБАКА

№18

а) 4*36* + 12*7 = *2*98

б) 5*6* + *0*4 = 10981

Восстановите поврежденную запись

№19

$$\begin{array}{r} ** \\ +\quad * \\ \hline **8 \end{array}$$

№20

$$\begin{array}{r} ** \\ +\ ** \\ \hline *98 \end{array}$$

№21

$$\begin{array}{r} \text{ДРАМА} \\ +\ \text{ДРАМА} \\ \hline \text{ТЕАТР} \end{array}$$

№22

$$\begin{array}{r} \text{СПОРТ} \\ +\ \text{СПОРТ} \\ \hline \text{КРОСС} \end{array}$$

№23

$$\begin{array}{r} *{,}5* \\ +\ 3{,}*4 \\ \hline 7{,}38 \end{array}$$

№24

$$\begin{array}{r} \text{ТУЗИК} \\ +\ \text{ТУЗИК} \\ \hline \text{КАРТУЗ} \end{array}$$

№25

$$\begin{array}{r} 5{,}*7 \\ +\ *{,}0* \\ \hline 6{,}00 \end{array}$$

№26

$$\begin{array}{r}\times\begin{array}{r}2*\\ *2\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}*8\\ 7*\end{array}\\ \hline 7*8\end{array}$$

№27

Решите ребус, если известно, что наибольшая цифра в числе СИЛЕН равна 5:

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}\text{РЕШИ}\\ \text{ЕСЛИ}\end{array}\\ \hline \text{СИЛЕН}\end{array}$$

№28

$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}*{,}48\\ 2{,}*1\end{array}\\ \hline 5{,}8*\end{array}$$

№29

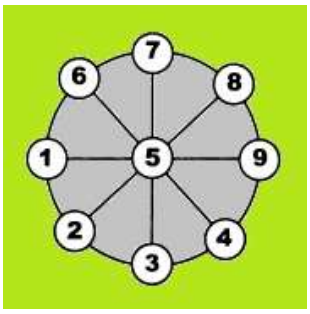
$$\begin{array}{r}+\begin{array}{r}\text{КОКА}\\ \text{КОЛА}\end{array}\\ \hline \text{ВОДА}\end{array}$$

№30

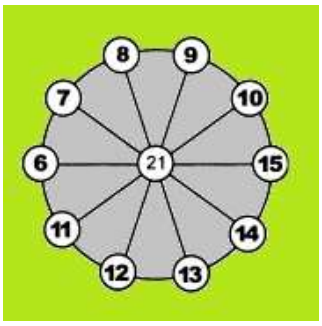
$$\begin{array}{r|l}-14** & *7\\ \cline{2-2} **5 & \\ \cline{1-1} -** & \\ *1 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, ПОДСКАЗКИ

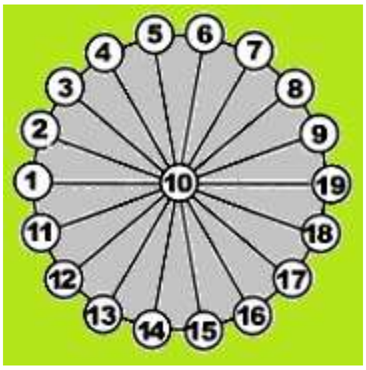
№1



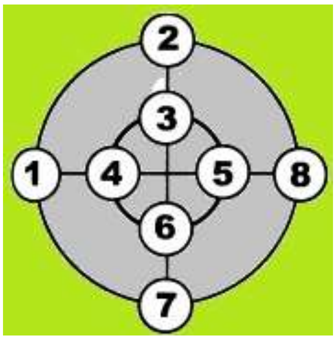
№2



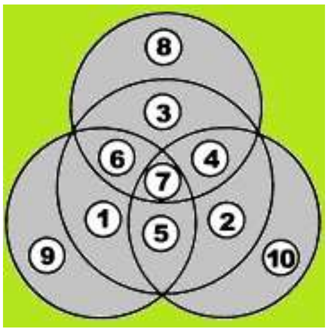
№3



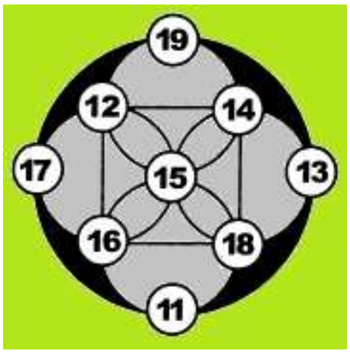
№4



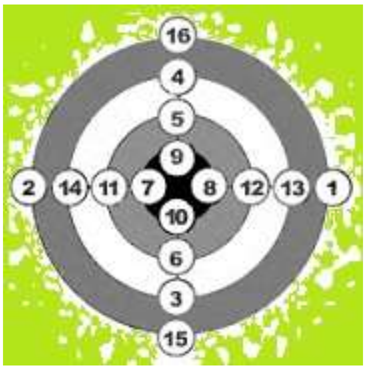
№5


8
3
6
4
7
1
5
2
9
10

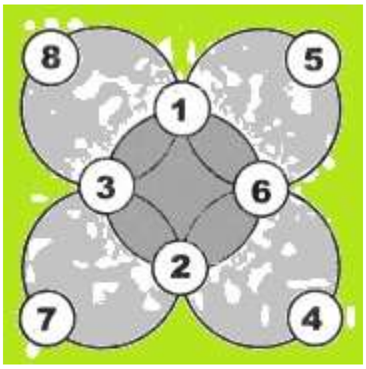
№6


19
12
14
17
15
13
16
18
11

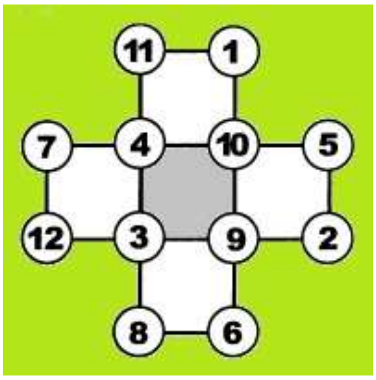
№7


16
4
5
9
2
14
11
7
8
12
13
1
10
6
3
15

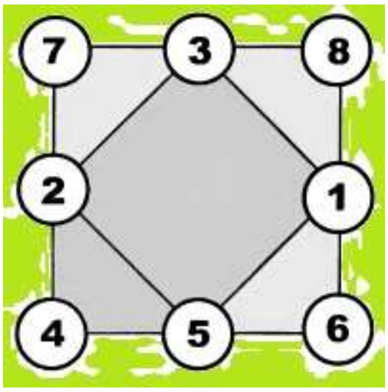
№8


8
5
1
3
6
2
7
4

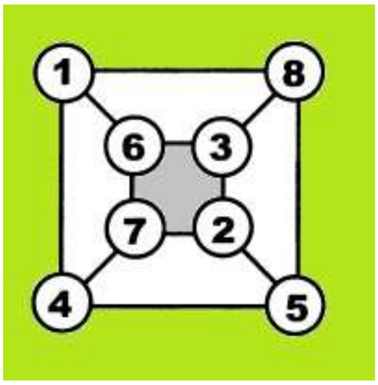
№9



№10



№11



№12

Ответ: 396 · 45 = 17820

№13

Ответ: 495 + 459 = 954

№14

Решение:

Для решения этого ребуса лучше перейти от деления к умножению: $5 \cdot АЙ = ЧАЙ$, значит, $Ч \cdot 100 + АЙ = АЙ \cdot 5$ и тогда $Ч \cdot 25 = АЙ$. Так как АЙ – двузначное, то Ч = 1, 2, 3. Для каждого Ч находим решение: 125, 250, 375. Итак получаем три решения:

$125 : 25 = 5;$

$250 : 50 = 5;$

$375 : 75 = 5.$

№15

Ответ: $1465 + 465 + 65 + 5 = 2000$

№16

Ответ: $625 \cdot 625 = 390625$

№17

Решение

Так как КА + КА + КА оканчивается на КА, то КА = 50, а значит, К = 5, А = 0. Так как Ш + Ш + Ш + 1 оканчивается на 0, то Ш = 3. Так как сумма трех чисел, начинающихся на 5 может начинаться лишь с 1, то С = 1. Рассматривая варианты для О, получаем, что О = 6 или О = 7, а значит, Б = 9 или Б = 2. Итак, получаем два варианта решения:

Ответ:

$56350 + 56350 + 56350 = 169050$

$57350 + 57350 + 57350 = 172050$

№18

Ответ:

а) $41361 + 1237 = 42598$

б) $5967 + 5014 = 10981$

№19

Ответ: $99 + 9 = 108$

№20

Ответ. 99 + 99 = 198

№21

Решение

Очевидно, Д≤4. В разряде сотен имеем А + А = А, значит, А = 0 (без перехода) или А = 9 (с переходом). Значение А = 0 не подходит, так как в разряде единиц А + А = Р (получаем А = Р = 0). Значит, А = 9, Р = 8, Е = 7. Тогда 2М + 1 = 10 + Т, Т < 9, значит М = 5 или 6 (так как получается переход), а значения 7 и 8 уже заняты буквами Е и Р. При М = 6 получается решение:

18969 + 18969 = 37938.

Ответ. 18969 + 18969 = 37938.

№22

$$\begin{array}{r} 43972 \\ +\,43972 \\ \hline 87944 \end{array}$$

Решение

С = 4; П = 3; Т = 2; Р = 7; К = 8; О = 9.

№23

Ответ.

3,54 + 3,84 = 7,38

№24

Ответ.

54271 + 54271 = 108542

№25

Ответ.

5,97 + 0,03 = 6,00

№26

Ответ.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r}24\\32\end{array}\\ \hline +\begin{array}{r}48\\72\end{array}\\ \hline 768\end{array}$$

№27

Решение

Так как наибольшая цифра в числе «СИЛЕН» равна 5, а С = 1, то остальные 4 цифры в данном числе будут 2, 3, 4, 5. Так как Н < 6, то И = 2. А значит, Н = 4. Так как Л > Е (в самом деле так как Е + 1 = Л, то Л > Е, ведь Л и Е меньше 5 по условию), то Л = 5, Е = 3. А тогда уже легко находим остальные цифры: Ш = 8, Р = 9. В итоге получается: 9382 + 3152 = 12534

Ответ. 9382 + 3152 = 12534

№28

Ответ. 8,48 – 2,61 = 5,87

№29

Ответ. 3930 + 3980 = 7910 (начать с А = 0, К < 5, так как О + О = О и О ≠ А, то О = 9. Рассматривая К = 1, 2, 3, 4, получим искомое решение).

№30

Ответ. 1431 : 27 = 53.

Литература и используемые интернет - источники:

http://logika.vobrazovanie.ru/index.php?link=rebus.html&&a=0

http://vsemzagadki.narod.ru/magia_chisel/chislovye_okruzhnosti.html

Глава 2.

ские

ии

Глава 2. Логические задачи

Решать логические задачи очень увлекательно. В них вроде бы нет никакой математики - нет ни чисел, ни функций, ни треугольников, ни векторов, а есть только лжецы и мудрецы, истина и ложь. В то же время дух математики в них чувствуется ярче всего - половина решения любой математической задачи (а иногда и гораздо больше половины) состоит в том, чтобы как следует разобраться в условии, распутать все связи между участвующими объектами.

Есть люди, для которых решение логической задачи - увлекательная, но несложная задача. Их мозг как луч прожектора сразу освещает все хитроумные построения, и к правильному ответу он приходит необычайно быстро. Замечательно, что при этом он и не могут объяснить, как они пришли к решению. "Ну, это же очевидно, ясно", - говорят они. "Ведь если ... " - и они начинают легко распутывать клубок противоречивых высказываний. "Действительно, все ясно", - говорит слушатель, огорченный тем, что он сам не увидел очевидного рассуждения. Согласитесь, что такое же ощущение часто возникает при чтении детективов.

Итак, мы узнаем, как разными способами можно решать логические задачи. Оказывается таких приемов несколько, они разнообразны и каждый из них имеет свою область применения. В этой главе вы узнаете кое-что об этих приемах. Познакомившись подробно, поймете в каких случаях удобнее использовать тот или другой метод.

Как научиться решать логические задачи

Многие люди только мыслят, что мыслят.

Им неприятен мыслительный процесс:

для этого нужен навык и известные усилия,

а зачем усилия, когда можно без.

Огден Неш

Логические или нечисловые задачи составляют обширный класс нестандартных задач. Сюда относятся, прежде всего, текстовые задачи, в которых требуется распознать объекты или расположить их в определенном порядке по имеющимся свойствам. При этом часть утверждений условия задачи может выступать с различной истинностной оценкой (быть истинной или ложной). К классу логических задач относятся также задачи на переливания и взвешивания (фальшивые монеты и т.п.).

Основные приемы и методы решения логических задач

Теория, мой друг, суха, но зеленеет жизни древо.

И.В.Гете

Известно несколько различных способов решения логических задач. Давайте назовем их так:

- Метод рассуждений;
- Метод таблиц;
- Метод графов;
- Метод блок-схем;
- Метод бильярда;
- Метод кругов Эйлера.

Остановимся отдельно на каждом из выделенных методов, иллюстрируя их примерами решения конкретных задач.

Метод первый: Метод рассуждений

На всякого мудреца довольно простоты.

Пословица

Способ рассуждений - самый примитивный способ. Этим способом решаются самые простые логические задачи. Его идея состоит в том, что мы проводим рассуждения, используя последовательно все условия задачи, и приходим к выводу, который и будет являться ответом задачи.

Идея метода: последовательные рассуждения и выводы из утверждений, содержащихся в условии задачи.

Познакомиться с этим методом можно на ***следующем примере***.

Этим способом обычно решают несложные логические задачи.

Задача 1. Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Решение. Имеется три утверждения. Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно. Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно. Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе — ложными. Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

Ответ: Сергей изучает китайский язык, Михаил — японский, Вадим — арабский.

Метод второй: Метод таблиц

Сначала приговор, потом доказательство.

Л.Керролл

Основной прием, который используется при решении текстовых логических задач, заключается в построении таблиц. Таблицы не только позволяют наглядно представить условие задачи или ее ответ, но в значительной степени помогают делать правильные логические выводы в ходе решения задачи. Приглашаем познакомиться с примером решения конкретной задачи методом таблиц.

Идея метода: оформлять результаты логических рассуждений в виде таблицы.

Преимущества метода:

- Наглядность.
- Возможность контролировать процесс рассуждений.
- Возможность формализовать некоторые логические рассуждения.

Задача 2.

Три клоуна Бим, Бам и Бом вышли на арену в красной, зеленой и синей рубашках. Их туфли были тех же цветов. У Бима цвета рубашки и туфель совпадали. У Бома ни туфли, ни рубашка не были красными. Бам был в зеленых туфлях, а в рубашке другого цвета. Как были одеты клоуны?

Решение.

Составим таблицу, в столбцах которой отметим возможные цвета рубашек и туфель клоунов (буквами К, З и С обозначены красный, зеленый и синий цвета). Будем заполнять таблицу, используя условия задачи. Туфли Бама зеленые, а рубашка не является зеленой. Ставим знак + в клетку 2-й строки и 5-го столбца, и знак - в клетку 2-й строки и 2-го столбца. Следовательно, у Бима и Бома туфли уже не могут быть зелеными, так же как не могут быть туфли Бама синими или красными. Отметим все это в таблице (см. табл. 1).

	Рубашки			Туфли		
Бим				+	–	–
Бам		–		–	+	–
Бом	–			–	–	+
	К	**З**	**С**	**К**	**З**	**С**

Таблица 1

	Рубашки			Туфли		
Бим	+	–	–	+	–	–
Бам	–	–	+	–	+	–
Бом	–	+	–	–	–	+
	К	**З**	**С**	**К**	**З**	**С**

Таблица 2

Далее, туфли и рубашка Бома не являются красными, отметим соответствующие ячейки таблицы знаком – . Из таблицы, заполненной на этом этапе, видим, что красные туфли могут быть только у Бима, а, следовательно, туфли Бома - синие. Правая часть таблицы заполнена, мы установили цвета обуви клоунов (табл.1). Цвет рубашки Бима совпадает с цветом его туфель и является красным. Теперь легко устанавливается владелец зеленой рубашки - Бом. Бам, в таком случае, одет в рубашку синего цвета.

Мы полностью заполнили таблицу, в которой однозначно устанавливаются цвета туфель и рубашек клоунов (см. табл. 2): Бим одет в красную рубашку и красные туфли, Бам в синей рубашке и зеленых туфлях, Бом в зеленой рубашке и туфлях синего цвета.

Ответ:

Бим одет в красную рубашку и красные туфли,

Бам в синей рубашке и зеленых туфлях,

Бом в зеленой рубашке и туфлях синего цвета.

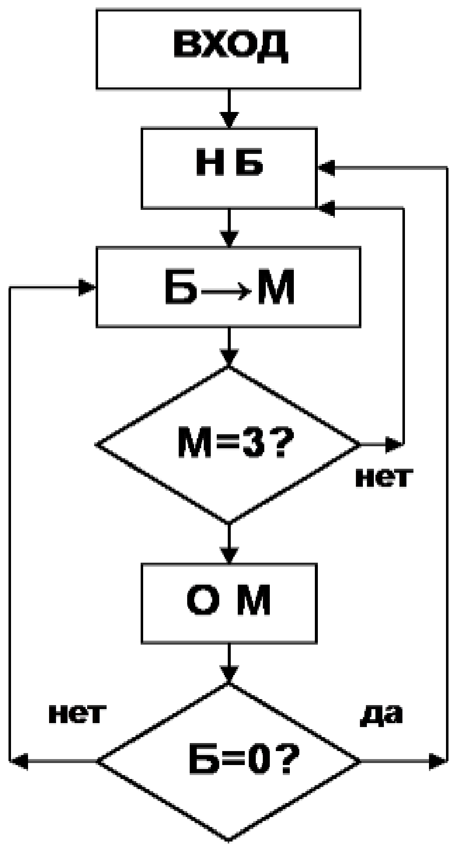
Метод третий: Метод блок-схем

Как без математических наук проводит свои линии паук.

А.Поуп

В этом разделе рассматривается еще один тип логических задач. Это задачи, в которых с помощью сосудов известных емкостей требуется отмерить некоторое количество жидкости, а также задачи, связанные с операцией взвешивания на чашечных весах. Простейший прием решения задач этого класса состоит в переборе возможных вариантов. Понятно, что такой метод решения не совсем удачный, в нем трудно выделить какой-либо общий подход к решению других подобных задач.

Более систематический подход к решению задач "на переливание" заключается в использовании блок-схем. Суть этого метода состоит в следующем. Сначала выделяются операции, которые позволяют нам точно отмерять жидкость. Эти операции называются командами. Затем устанавливается последовательность выполнения выделенных команд. Эта последовательность оформляется в виде схемы. Подобные схемы называются блок-схемами и широко используются в программировании. Составленная блок-схема является программой, выполнение которой может привести нас к решению поставленной задачи. Для этого достаточно отмечать, какие количества жидкости удается получить при работе составленной программы. При этом обычно заполняют отдельную таблицу, в которую заносят количество жидкости в каждом из имеющихся сосудов.



Идея метода: описать последовательность выполнения операций, определить порядок их выполнения и фиксировать состояния.

Здесь приводится два примера решений задачи на переливание и на взвешивание. Примеры решения задач.

Задача 3.

Имеются два сосуда — трехлитровый и пятилитровый. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 литров воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно выливать воду.

Решение.

Перечислим все возможные операции, которые могут быть использованы нами, и введем для них следующие сокращенные обозначения: НБ — наполнить больший сосуд водой из-под крана; НМ — наполнить меньший сосуд водой из-под крана; ОБ — опорожнить больший сосуд, вылив воду в раковину; ОМ — опорожнить меньший сосуд, вылив воду в раковину; Б→М — перелить из большего в меньший, пока больший сосуд не опустеет или меньший сосуд не наполнится; М→Б — перелить из меньшего в больший, пока меньший сосуд не опустеет или больший сосуд не наполнится. Выделим среди перечисленных команд только три: НБ, Б→М, ОМ. Кроме этих трех команд рассмотрим еще две вспомогательные команды: Б = 0 ? — посмотреть, пуст ли больший сосуд; М = 3 ? — посмотреть, наполнен ли малый сосуд.

В зависимости от результатов этого осмотра мы переходим к выполнению следующей команды по одному из двух ключей - "да" или "нет". Такие команды в программировании принято называть командами "условного перехода" и изображать в блок-схемах в виде ромбика с двумя ключами-выходами.

Договоримся теперь о последовательности выполнения выделенных команд. После Б→М будем выполнять ОМ всякий раз, как меньший сосуд оказывается наполненным, и НБ всякий раз, как больший сосуд будет опорожнен. Последовательность команд изобразим в виде блок-схемы (Рис. 1). Начнем выполнение программы. Будем фиксировать, как меняется количество воды в сосудах, если действовать по приведенной схеме. Результаты оформим в виде таблицы (табл.).

Б	0	5	2	2	0	5	4	4	1	1	0	5	3	3	0	0
М	0	0	3	0	2	2	3	0	3	0	1	1	3	0	3	0

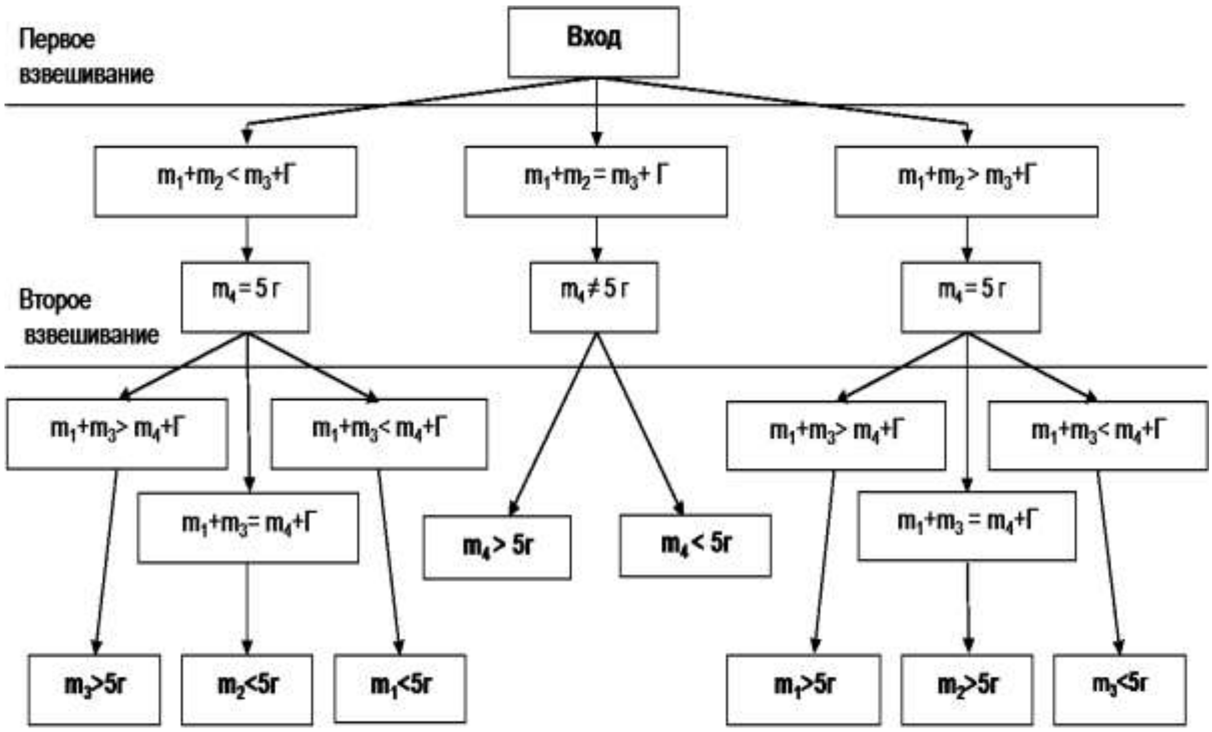
Дальше эта последовательность будет полностью повторяться. Из таблицы видим, что количество воды в обоих сосудах вместе образует следующую последовательность: 0, 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3, 0 и т.д. Таким образом, действуя по приведенной схеме, можно отмерить любое количество литров от 1 до 7. Чтобы отмерить еще и 8 литров, надо наполнить оба сосуда.

Задача 4.

Среди четырех монет одна фальшивая. Она отличается массой, однако неизвестно, легче она или тяжелее. Масса настоящей монеты 5 г. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах обнаружить фальшивую монету, если имеется одна гиря массой 5 г? Можно ли при этих условиях опознать, легче фальшивая монета или тяжелее?

Решение.

Пусть m1, m2, m3, m4 – массы четырех монет соответственно, Г - масса гири. Оформим решение в виде блок-схемы (см.рис.). Приведенная схема задает программу, осуществление которой позволяет установить фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее. Взвешиваниям в блок-схеме соответствуют прямоугольники - операторы условного перехода. В схеме выделены первое и второе взвешивания горизонтальными линиями.



Прокомментируем для примера ход рассуждений, двигаясь лишь по одной ветви блок-схемы. Итак, первое взвешивание: пусть m1 + m2 < m3 + + Г. Это означает, что фальшивая монета находится среди первых трех монет, и, следовательно, четвертая монета истинная, то есть m4 = 5.

Второе взвешивание: пусть m1+m3 > m4+Г. Тогда фальшивая монета тяжелее (так как m4+Г - вес двух истинных монет) и это либо первая, либо третья монета. Но показания весов при первом взвешивании (m1+m2 < m3+Г) позволяют нам сделать вывод, что более тяжелой является третья монета. Если бы показания весов при втором взвешивании были противоположными, то фальшивая монета должна бы быть более легкой, а, стало быть, это была первая монета. Наконец, если при втором взвешивании весы будут в равновесии, то и третья и первая монеты не могут быть фальшивыми. Следовательно, фальшивой является вторая монета и вес ее меньше 5 грамм.

Метод четвертый: Метод математического бильярда

Прежде чем решать задачу, подумай,

что делать с ее решением!

Д.Пойа

Надеемся, что Вам известна игра бильярд за прямоугольным столом с лузами. Появившись до нашей эры в Индии и Китае, бильярд через много веков перекочевал в европейские страны – упоминание о нем имеется в английских летописях VI века. В России бильярд стал известен и распространился при Петре I. Подобно тому, как азартная игра в кости вызвала к жизни "исчисление" вероятностей, игра в бильярд послужила предметом серьезных научных исследований по механике и математике. Представьте себе горизонтальный бильярдный стол произвольной формы, но без луз. По этому столу без трения движется точечный шар, абсолютно упруго отражаясь от бортов стола. Спрашивается, какой может быть траектория этого шарика? Поиски ответа на этот вопрос и послужили появлению теории математического бильярда или теории траекторий.

Идея метода: нарисовать бильярдный стол и интерпретировать действия движениями бильярдного шара, фиксируя состояния в отдельной таблице.

Преимущества метода:

- Наглядность.
- Привлекательность идеи бильярда.
- Возможность обобщить метод на широкий класс задач.

В этом разделе мы приведем одно изящное применение математического бильярда к решению задач на переливание. Загляните обязательно в приготовленный нами пример решения задач с помошью игры в бильярд. ***Примеры решения задач.***

Задачи на переливание жидкостей можно очень легко решать, вычерчивая бильярдную траекторию шара, отражающегося от бортов стола, имеющего форму параллелограмма. Рассмотрим туже задачу, что и в предыдущем разделе (Метод блок-схем).

Задача 5.

Имеются два сосуда — трехлитровый и пятилитровый. Нужно, пользуясь этими сосудами, получить 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 литров воды. В нашем распоряжении водопроводный кран и раковина, куда можно выливать воду.

Решение.

В рассматриваемой задаче стороны параллелограмма должны иметь длины 3 и 5 единиц. По горизонтали будем откладывать количество воды в литрах в 5-литровом сосуде, а по вертикали – в 3-литровом сосуде. На всем параллелограмме нанесена сетка из одинаковых равносторонних треугольников (см. рис.1).

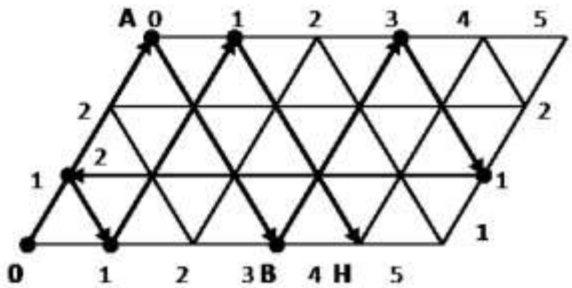


Рисунок 1

Бильярдный шар может перемещаться только вдоль прямых, образующих сетку на параллелограмме. После удара о стороны параллелограмма шар отражается и продолжает движение вдоль выходящего из точки борта, где произошло соударение. При этом каждая точка параллелограмма, в которой происходит соударение, полностью характеризует, сколько воды находится в каждом из сосудов.

Пусть шар находится в левом нижнем углу и после удара начнет перемещаться вверх вдоль левой боковой стороны параллелограмма до тех пор, пока не достигнет верхней стороны в точке А. Это означает, что мы полностью наполнили водой малый сосуд. Отразившись упруго, шар покатится вправо вниз и ударится о нижний борт в точке В, координаты которой 3 по горизонтали и 0 по вертикали. Это означает, что в большом сосуде 3 литра воды, а в малом сосуде воды нет, то есть мы перелили воду из малого сосуда в большой сосуд.

Прослеживая дальнейший путь шара, и записывая все этапы его движения в виде отдельной таблицы (табл.1), в конце концов, мы попадаем в точку Н, которая соответствует состоянию, когда малый сосуд пуст, а в большом сосуде 4 литра воды. Таким образом, получен ответ и указана последовательность переливаний, позволяющих отмерить 4 литра воды. Все 8 переливаний изображены схематически в таблице.

	О	А	В						Н
М	0	3	0	3	1	1	0	3	0
Б	0	0	3	3	5	0	1	1	4

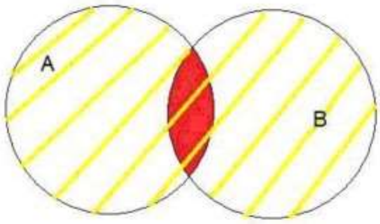
Является ли это решение самым коротким? Нет, существует второй путь, когда воду сначала наливают в пятилитровый сосуд. Если на диаграмме шар из точки О покатится вправо по нижней стороне параллелограмма и затем, отразившись от правой боковой стороны, в точку 2 на верхней стороне параллелограмма и т.д., то получим более короткое решение задачи. Можно показать, что полученное решение с 6 переливаниями уже является самым коротким.

Метод пятый: Круги Эйлера

Круги Эйлера – это один из методов решения логических задач, который дает наглядное представление о возможном способе изображения условий, зависимости, изображений. Чаще всего этот метод используется в тех задачах, в которых требуется найти некоторое пересечение множеств или их объединение.

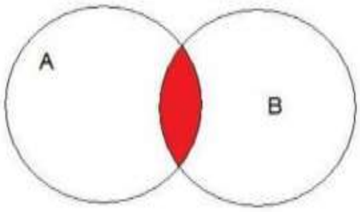
В математике рисунки в виде кругов, изображающих множества, используются очень давно. Одним из первых, кто пользовался этим методом был выдающийся немецкий математик и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716г.). В его черновиках были обнаружены рисунки с такими кругами. Этот метод развил швейцарский математик Леонард Эйлер (1707-1783г.). Он долгие годы работал в Петербургской Академии наук. Наибольшего расцвета графические методы достигли в сочинениях английского логика Джона Венна (1843-1923г.). В честь Венна вместо кругов Эйлера соответствующие рисунки называли иногда диаграммами Венна.

Суммой или объединением двух множеств называется множество всех тех предметов, каждый из которых есть элемент хотя бы одного из данных множеств.



$A \cup B$

Пересечением двух множеств называется множество всех элементов, общих всем данным множествам.



$A \cap B$

Задача 6.

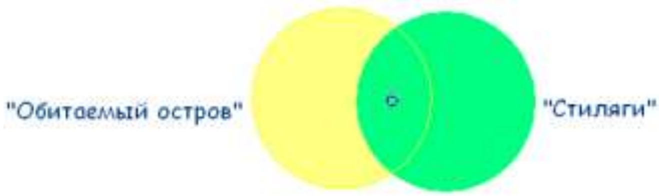
Известно, что число лежит между 1 и 8. И тоже самое число лежит между 5 и 10. Что это за число?

Решение: Первое множество чисел, лежащих между 1 и 8 состоит из элементов {2;3;4;5;6;7}. Второе множество чисел, лежащих между 5 и 10, состоит из элементов {6;7;8;9}. Пересечением этих множеств являются числа 6 и 7.

Ответ: 6 и 7.

Задача 7. "Обитаемый остров" и "Стиляги"

Некоторые ребята из нашего класса любят ходить в кино. Известно, что 15 ребят смотрели фильм «Обитаемый остров», 11 человек – фильм «Стиляги», из них 6 смотрели и «Обитаемый остров», и «Стиляги». Сколько человек смотрели только фильм «Стиляги»?



Решение

Чертим два множества таким образом: 6 человек, которые смотрели фильмы «Обитаемый остров» и «Стиляги», помещаем в пересечение множеств.

15 – 6 = 9 – человек, которые смотрели только «Обитаемый остров».

11 – 6 = 5 – человек, которые смотрели только «Стиляги». Получаем:

Ответ. 5 человек смотрели только «Стиляги».

Решение логических задач можно сравнить с решением научной проблемы. Вначале исследователь располагает многими данными, на первый взгляд никак не связанными между собою. В ходе анализа этих данных выдвигаются и сопоставляются с фактами новые и новые гипотезы. И вот, наконец, одна из гипотез совпадает с результатами экспериментов и наблюдений. Разрозненные данные сливаются в целостную картину. Становится ясно, что найденное объяснение фактов является единственно возможным. Задача решена. Похожим методом ищут ответы на логические задачи. Единого правила их решения нет.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. *В магазине*

Три подружки - Ксюша, Лена и Даша - купили в магазине груши, яблоки и сливы, причем каждая девочка покупала только один вид фруктов и все покупки у них были разные. На вопрос, кто что купил, продавец ответил:

"Ксюша купила груши.

Лена - точно не груши.

Даша - не сливы".

Как оказалось позже, два из трех ответов были ложными и только один истинным.

Кто что купил?

Задача 2. *Самый лучший друг*

В классе проводился опрос, кто самый лучший друг. Обсуждая его итоги, один ученик сказал: "Сережа на первом месте, а на втором - Денис". Другой ученик возразил: "Сережа на втором месте, а Ваня на первом". На что учитель заметил, что в высказывании каждого ученика одна часть верная, а другая нет. Кто из ребят оказался по итогам опроса на первом месте, а кто на втором?

Задача 3. *Дорога в театр*

Мужчина спросил у встречных прохожих, как пройти в театр, и получил следующие ответы:

Первый прохожий сказал: "Сначала поверните направо, а потом идите прямо".

Второй сказал: "Сначала поверните налево, а потом идите прямо".

Третий сказал: "Сначала идите прямо, а потом поверните налево".

Оказалось, что каждый из прохожих ошибся в одном направлении.

Как же надо было идти в театр?

Задача 4. *Соревнования по гимнастике*

Алла, Валя, Таня и Даша участвовали в соревнованиях по гимнастике. Перед соревнованиями болельщики высказали такие предположения о будущем распределении мест:

"Таня займет первое место, Валя - второе";

"Таня займет второе место, Даша - третье";

"Алла займет второе место, Даша - четвертое".

Оказалось, что в каждом из прогнозов сбылась только половина.

Какие места заняли девочки, если все они заняли разные места?

Задача 5. Беседа подружек

На улице беседовали четыре подружки - Ася, Катя, Галя и Нина. Девочка в зеленом платье (не Ася и не Катя) стояла между девочкой в голубом платье и Ниной. Девочка в белом платье стояла между девочкой в розовом платье и Катей.

В платье какого цвета была каждая из девочек?

Задача 6. Какой мультфильм любит каждый?

Жила-была одна дружная семья: мама, папа и сын. Они все любили делать вместе. Но вот мультфильмы любили разные: «Ну, погоди!», «Покемоны», «Том и Джерри». Определите, какой мультфильм любит каждый из них, если мама, папа и любитель мультфильма «Покемоны» никогда не унывают, а папа и любитель мультфильма «Том и Джерри» делают зарядку по утрам?

Задача7. Футбол

Четыре футбольных команды: итальянская команда «Милан», испанская – «Реал», российская – «Зенит», английская – «Челси» встретились в групповом этапе лиги чемпионов по футболу. Их тренировали тренеры из этих же четырех стран: итальянец Антонио, испанец Родриго, русский Николай, англичанин Джон. Известно, что национальность у всех четырех тренеров не совпадала с национальностью команд. Требуется определить тренера каждой команды, если известно:

а) Зенит не тренируется у Джона и Антонио.

б) Милан обещал никогда не брать Джона главным тренером.

Задача 8. Любители музыки

В клубе «Отдых» познакомились 3 любителя клубной музыки видов техно, хаус, рейв. Один говорит: «Вы какую музыку больше любите? Я техно люблю!». Другой ответил, что любит хаус, а третий сказал, что не любит ни техно, ни хаус, но зато обожает рейв. Интересно то, что все они были в банданах и рубашках черного, белого и желтого цветов, но цвет банданы и рубашки совпадал только у любителя техно. А у любителя хаус ни рубашка, ни бандана не были белыми. А любитель рейв был в желтой рубашке. Определите цвет рубашек и бандан каждого из любителей клубной музыки.

Задача* 9. *Три поросёнка

Жили-были на свете три поросёнка, три брата: Ниф-Ниф, Наф-Наф, Нуф-Нуф. Построили они три домика: соломенный, деревянный и кирпичный. Все три брата выращивали возле своих домиков цветы: розы, ромашки и тюльпаны. Известно, что Ниф-Ниф живет не в соломенном домике, а Наф-Наф – не в деревянном; возле соломенного домика растут не розы, а тот, у кого деревянный домик, выращивает ромашки. У Наф-Наф аллергия на тюльпаны, поэтому он не выращивает их. Узнайте, кто в каком домике живет и какие цветы выращивает.

Задача 10. Компьютерные игры

В компьютерном классе на уроке информатики, во время отсутствия учителя, пять ребят – Максим, Настя, Саша, Рома, Сережа – отвлеклись от нужной работы и стали играть в такие игры: пасьянс «Паук», гонки, сапер, «Марио», тетрис. Каждый из них играл только в одну игру.

• Саша думал, что в «Марио» играет Настя.

• Настя предполагала, что Рома играет в тетрис, а Максим – в гонки.

• Рома считал, что Сережа играет в гонки, а Саша – в сапера.

• Максим думал, что Настя раскладывает пасьянс «Паук», а в «Марио» играет Рома.

В результате оказалось, что все они ошиблись в своих предположениях. Кто и во что играл?

Задача 11. Студенты

Дина, Соня, Коля, Рома и Миша учатся в институте. Их фамилии – Бойченко, Карпенко, Лысенко, Савченко и Шевченко.

Рома никогда не видел своей мамы.

Родители Дины никогда не встречались с родителями Коли.

Студенты Шевченко и Бойченко играют в одной баскетбольной команде.

Услышав, что родители Карпенко собираются поехать в город, мать Шевченко пришла к матери Карпенко и попросила, чтобы та отпустила своего сына к ним на вечер, но оказалось, что отец Коли уже договорился с родителями Карпенко и пригласил их сына к Коле.

Отец и мать Лысенко – хорошие друзья родителей Бойченко. Все четверо очень довольны, что их дети собираются пожениться.

Установите имя и фамилию каждого из молодых людей и девушек.

Задача 12. Мушкетёры

Атос, Портос, Арамис и Д’Артаньян – четыре талантливых молодых мушкетёра. Один из них лучше всех сражается на шпагах, другой не имеет равных в рукопашном бою, третий лучше всех танцует на балах, четвертый без промаха стреляет с пистолетов. О них известно следующее:

• Атос и Арамис наблюдали на балу за их другом – прекрасным танцором.

• Портос и лучший стрелок вчера с восхищением следили за боем рукопашника.

• Стрелок хочет пригласить в гости Атоса.

• Портос был очень большой комплекции, поэтому танцы были не его стихией.

Кто чем занимается?

Задача13. «Пепси», «Кока-кола», квас и «Спрайт»

В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся «Пепси», «Кока-кола», квас и «Спрайт». Известно, что «Спрайт» и «Пепси» не в бутылке, сосуд с «Кока-колой» находится между кувшином и сосудом с квасом, в банке – не «Кока-кола» и не «Спрайт». Стакан находится около банки и сосуда с «Пепси». Как распределены эти жидкости по сосудам?

Задача 14. «Евровидение-2009»

В конкурсе «Евровидение-2009» страны Норвегия, Исландия, Азербайджан и Турция заняли первых четыре места. На следующий день на вопрос, кто какое место занял, представители стран ответили так:

Норвегия: Азербайджан занял первое место;

Исландия: Мы заняли не второе место;

Азербайджан: Турция заняла первое место;

Турция: Мы заняли не четвертое место.

Позже стало известно, что все эти ответы были ложными. Какая страна заняла первое место?

Задача15. "Виа Гра"

В группе «Виа Гра» поют три девушки: блондинка, рыжая и брюнетка. В клипе «Бриллианты» девушки одеты в белое, красное и черное платья. Интересно, - заметила брюнетка, - что цвета наших с вами волос не соответствуют нашим платьям. - А ведь верно, но мне подошло бы твое платье, - подтвердила девушка в белом платье. В какое платье была одета каждая из девушек?

Задача 16. «Мир музыки»

В магазин «Мир музыки» пришло 35 покупателей. Из них 20 человек купили новый диск певицы Максим, 11 – диск Земфиры, 10 человек не купили ни одного диска. Сколько человек купили диски и Максим, и Земфиры?

Задача17. Гарри Поттер, Рон и Гермиона

На полке стояло 26 волшебных книг по заклинаниям, все они были прочитаны. Из них 4 прочитал и Гарри Поттер, и Рон. Гермиона прочитала 7 книг, которых не читали ни Гарри Поттер, ни Рон, и две книги, которые читал Гарри Поттер. Всего Гарри Поттер прочитал 11 книг. Сколько книг прочитал только Рон?

Задача 18. Экстрим

Из 100 ребят, отправляющихся в детский оздоровительный лагерь, кататься на сноуборде умеют 30 ребят, на скейтборде – 28, на роликах – 42. На скейтборде и на сноуборде умеют кататься 8 ребят, на скейтборде и на роликах – 10, на сноуборде и на роликах – 5, а на всех трех – 3. Сколько ребят не умеют кататься ни на сноуборде, ни на скейтборде, ни на роликах?

Задача 19.

В трех шестых классах 70 ребят. Из них 28 занимаются в драмкружке, 32 поют в хоре, 22 увлекаются спортом. В драмкружке 10 ребят из хора, в хоре 6 спортсменов, в драмкружке 8 спортсменов, 3 спортсмена посещают и драмкружок и хор. Сколько ребят не поют в хоре, не увлекаются спортом и не занимаются в драмкружке? Сколько ребят заняты только спортом?

Задача20. Алиса, Лев и Единорог

Однажды Алиса повстречала Льва и Единорога, отдыхавших под деревом. Странные это были существа. Лев лгал по понедельникам, вторникам и средам и говорил правду во все остальные дни недели. Единорог же вел себя иначе: он лгал по четвергам, пятницам и субботам и говорил правду во все остальные дни недели. Они высказали следующие утверждения:

Лев:

- Вчера был один из дней, когда я лгу.

Единорог:

- Вчера был один из дней, когда я тоже лгу.

Из этих двух высказываний Алиса сумела вывести, какой день недели был вчера.

Что это был за день?

Задача21. Перетягивание каната

Андрей, Борис, Вадим и Геннадий заняли первые четыре места в соревновании по перетягиванию каната. На вопрос корреспондента, какое место занял каждый из них, было получено три ответа:

1) Андрей – первое, Борис – второе,

2) Андрей – второе, Геннадий – третье,

3) Вадим – второе, Геннадий – четвертое.

В каждом из этих ответов одна часть правдива, а вторая ложна. Кто занял какое место?

Задача 22. Поход в кино

В нашем классе 30 учащихся. На экскурсию в музей ходили 23 человека, в кино и в музей - 6 человек, а 2 человека не ходили ни в кино, ни в музей. Сколько человек нашего класса ходили в кино?

Задача 23. Про школьников

В классе 35 учеников, из них 20 школьников занимаются в математическом кружке, 11- в литературном, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько литераторов увлекаются математикой?

Задача № 24.

Коля, Боря, Вова и Юра заняли первые четыре места в соревновании. На вопрос, какие места они заняли, трое из них ответили:

Коля ни первое, ни последнее,

Боря второе;

Вова не был последним.

Какое место занял каждый мальчик?

Задача № 25.

Три друга Коля, Олег и Петя играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Коля сказал: “Это не я разбил стекло”. Олег сказал: “Это Петя разбил стекло”. Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое – нет. Кто из мальчиков разбил стекло?

Задача 26.

Четверо ребят – Алексей, Борис, Владимир и Григорий участвовали в лыжных гонках. На следующий день, на вопрос, кто какое место занял, они ответили так:

Алексей: Я не был ни первым и не последним;

Борис: Я не был последним;

Владимир: Я был первым;

Григорий: Я был последним.

Известно, что три из этих ответов были правдивыми, а один – ложью. Кто сказал правду? Кто был первым?

Задача 27.

Барсук позвал к себе гостей:

Медведя, рысь и белку.

И подарили барсуку

Подсвечник и тарелку.

Когда же он позвал к себе

Рысь, белку, мышку, волка,

То он в подарок получил

Подсвечник и иголку.

Им были вновь приглашены

Волк, мышка и овечка.

И получил в подарок он

Иголку и колечко.

Он снова пригласил овцу,

Медведя, волка, белку.

И подарили барсуку

Колечко и тарелку.

Нам срочно нужен ваш совет.

(На миг дела отбросьте.)

Хотим понять, какой предмет

Каким дарился гостем.

И кто из шестерых гостей

Явился без подарка?

Не можем мы сообразить,

Сидим... Мудрим... Запарка...

Задача 28.

В симфонический оркестр приняли на работу трёх музыкантов:

Брауна, Смита и Вессона, умеющих играть на скрипке, флейте, альте, кларнете, гобое и трубе.

Известно, что: Смит самый высокий; играющий на скрипке меньше ростом играющего на флейте; играющие на скрипке и флейте и Браун любят пиццу; когда между альтистом и трубачом возникает ссора, Смит мирит их; Браун не умеет играть ни на трубе, ни на гобое.

На каких инструментах играет каждый из музыкантов, если каждый владеет двумя инструментами?

Задача 29.

Владимир, Игорь и Сергей преподают математику, физику и литературу, а живут они в Рязани, Туле и Ярославле. Известно также, что Владимир живет не в Рязани, Игорь живет не в Туле, рязанец – не физик, Игорь – не математик, туляк преподает литературу. Кто где живет и что преподает?

Задача 30.

Вадим, Сергей и Михаил изучают различные иностранные языки: китайский, японский и арабский. На вопрос, какой язык изучает каждый из них, один ответил: "Вадим изучает китайский, Сергей не изучает китайский, а Михаил не изучает арабский". Впоследствии выяснилось, что в этом ответе только одно утверждение верно, а два других ложны. Какой язык изучает каждый из молодых людей?

Задача 31.

Три дочери писательницы Дорис Кей — Джуди, Айрис и Линда, тоже очень талантливы. Они приобрели известность в разных видах искусств — пении, балете и кино. Все они живут в разных городах, поэтому Дорис часто звонит им в Париж, Рим и Чикаго. Известно, что:

Джуди живет не в Париже, а Линда — не в Риме;

парижанка не снимается в кино;

та, кто живет в Риме, певица;

Линда равнодушна к балету.

Где живет Айрис, и какова ее профессия?

Задача 32.

На фирме работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 - немецкий язык, а 23 - оба языка. Сколько человек фирмы не знают ни английского, ни немецкого языков?

Задача 33.

Из 40 учащихся нашего класса 32 любят молоко, 21 - лимонад, а 15 - и молоко, и лимонад. Сколько ребят в нашем классе не любят ни молоко, ни лимонад?

Задача 34.

12 моих одноклассников любят читать детективы, 18 -фантастику, трое с удовольствием читают и то, и другое, а один вообще ничего не читает. Сколько учеников в нашем классе?

Задача 35.

Из тех 18 моих одноклассников, которые любят смотреть триллеры, только 12 не прочь посмотреть и мультфильмы. Сколько моих одноклассников смотрят одни «мультики», если всего в нашем классе 25 учеников, каждый из которых любит смотреть или триллеры, или мультфильмы, или и то и другое?

Задача 36.

65 % бабушкиных кроликов любят морковку, 10 % любят и морковку, и капусту. Сколько процентов кроликов не прочь полакомиться только капустой?

Задача 37.

В одном классе 25 учеников. Из них 7 любят груши, 11 -черешню. Двое любят груши и черешню; 6 - груши и яблоки; 5 -яблоки и черешню. Но есть в классе два ученика, которые любят все и четверо таких, что не любят фруктов вообще. Сколько учеников этого класса любят яблоки?

Задача 38.

В конкурсе красоты участвовали 22 девушки. Из них 10 было красивых, 12 - умных и 9 -добрых. Только 2 девушки были и красивыми, и умными; 6 девушек были умными и одновременно добрыми. Определите, сколько было красивых и в то же время добрых девушек, если я скажу вам, что среди участниц не оказалось ни одной умной, доброй и вместе с тем красивой девушки?

Задача 39.

Из 100 человек 85 знают английский язык, 80 - испанский, 75 - немецкий. Все владеют, по крайней мере, одним иностранным языком. Среди них нет таких, которые знают два иностранных языка, но есть владеющие тремя языками. Сколько человек из этих 100 знают три языка?

Задача 40.

Из сотрудников фирмы 16 побывали во Франции, 10 -в Италии, 6 - в Англии; в Англии и Италии - 5; в Англии и Франции - 6; во всех трех странах - 5 сотрудников. Сколько человек посетили и Италию, и Францию, если всего в фирме работают 19 человек, и каждый из них побывал хотя бы в одной из названных стран?

Задача 41.

В классе 38 человек. Из них 16 играют в баскетбол, 17 - в хоккей, 18 - в футбол. Увлекаются двумя видами спорта - баскетболом и хоккеем - четверо, баскетболом и футболом - трое, футболом и хоккеем - пятеро. Трое не увлекаются ни баскетболом, ни хоккеем, ни футболом.
Сколько ребят увлекаются одновременно тремя видами спорта?
Сколько ребят увлекается лишь одним из этих видов спорта?

Задача 42.

Встретились три друга: Александров, Борисов и Владимиров. Владимиров сказал своему другу, которого зовут Борисом: одного из нас зовут Александром, другого – Борисом, третьего – Владимиром, но ни у одного из нас имя не соответствует фамилии. Как звали каждого из друзей?

Задача 43.

За квадратным столом университетской столовой сидели четыре бывших одноклассника, которые учатся на разных факультетах. Математик сидел напротив Василия, рядом с историком. Биолог сидел рядом с Андреем. Соседями Григория были Борис и филолог. Определить, на каком из факультетов учится каждый из друзей и как они разместились за столом.

Ответы, решения, подсказки

Задача 1. *В магазине*

Ответ :

Ксюша купила сливы, Лена - груши, Даша - яблоки.

Задача 2.

Ответ :

Ваня оказался на первом месте, Денис - на втором.

Задача 3. *Дорога в театр*

Ответ :

Надо было все время идти прямо.

Задача 4. *Соревнования по гимнастике*

Ответ :

Таня заняла первое место, Алла - второе, Даша - третье, Валя - четвертое.

Задача 5. Беседа подружек

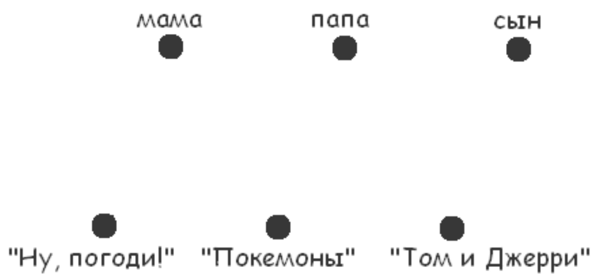
Ответ :

Галя была в зеленом платье, Нина - в розовом, Ася - в белом, Катя - в голубом.

Задача 6. Какой мультфильм любит каждый?

Решение.

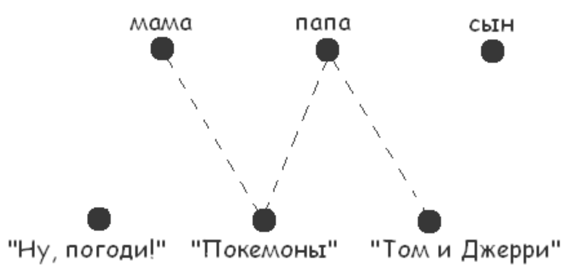
Рассмотрим множество людей: мама, папа, сын и множество мультфильмов «Ну, погоди!», «Покемоны», «Том и Джерри». Обозначим элементы этих двух множеств точками:



Если точке из одного множества соответствует точка другого множества, будем соединять эти точки сплошной линией, если не соответствует – то штриховой.

Заметим, что по условию задачи у человека только один любимый мультфильм.

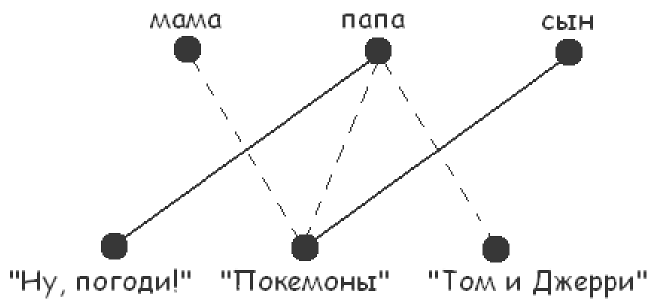
Учитывая данные задачи, получаем следующую схему:



Из условия задачи следует, что нужно найти единственно возможное соответствие между элементами двух множеств.

Правило: если какая-то точка оказывается соединенной с двумя точками другого множества штриховыми линиями, то с третьей точкой она должна быть соединена сплошной.

Поэтому граф на рисунке будет выглядеть следующим образом:



Теперь мы установили, что папа любит мультфильм «Ну, погоди!», сын – «Покемоны». В обеих множествах остается только по одной точке, следовательно мама любит мультфильм «Том и Джерри». Задача решена.

Таким же способом можно находить соответствие между тремя множествами. Тогда при решении мы можем получить треугольники трех видов:

а) все стороны являются сплошными отрезками (решение задачи);

б) одна сторона – сплошной отрезок, а две другие – штриховые;

в) все стороны – штриховые отрезки.

Таким образом, нельзя получить треугольник, у которого бы две стороны были сплошными отрезками, а третья – штриховой отрезок.

Ответ: папа любит мультфильм «Ну, погоди!», сын – «Покемоны», мама любит мультфильм «Том и Джерри».

Задача7. Футбол

Решение.

Решая задачу, мы заведомо знаем, что у каждой команды только один тренер.

Чтобы решить задачу табличным способом, нужно знать следующие правила:

1.В каждой строке и в каждом столбце таблицы может стоять только один знак соответствия (например «+»).

2.Если в строке (или столбце) все «места», кроме одного, заняты элементарным запретом (знак несоответствия, например «-»), то на свободное место нужно поставить знак «+»; если в строке (или столбце) уже есть знак «+», то все остальные места должны быть заняты знаком «-».

Таким образом, решение будет доведено до конца, когда мы сумеем разместить по одному плюсу в каждом ряду и колонке, обозначив таким образом, тренеров всех четырех команд.

А теперь приступаем к решению задачи.

Нам известно, что ни у одной из команд национальность тренера и команды не совпадали, а также, что «Зенит» не тренируется у Джона и Антонио, значит у этой команды тренер не Джон и не Антонио; а «Милан» обещал никогда не брать Джона тренером, значит у команды «Милан» тренер не Джон. Если проставить соответствующие минусы, то таблица будет выглядеть так:

	Италия / «Милан»	Испания / «Реал»	Россия/– «Зенит»	Англия / «Челси»
Итальянец Антонио	-		-	
Испанец Родриго		-		
Русский Николай			-	
Англичанин Джон	-		-	-

Таким образом, становится ясно, что у «Зенита» тренер Родриго (методом исключения). Поставим «+» напротив Родриго в колонке «Зенит» и заполним свободные клетки в его ряду минусами:

	Италия / «Милан»	Испания / «Реал»	Россия/– «Зенит»	Англия / «Челси»
Итальянец Антонио	-		-	
Испанец	_	-	+	_

Родриго				
Русский			-	
Николай				
Англичанин	-		-	-
Джон				

Теперь можно сделать вывод, что тренер «Милана» – Николай. Поставим «+» напротив Николая и заполним свободные клетки в его ряду минусами. Теперь видно, что «Челси» тренирует Антонио, а «Реал» - Джон.

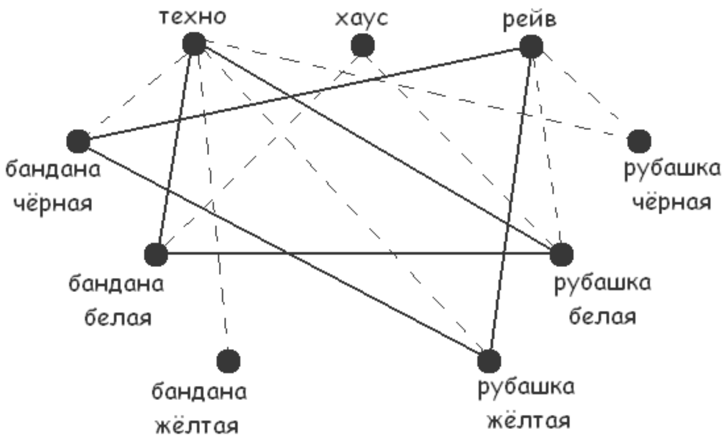
Ответ. Российская команда «Зенит» тренируется у испанца Родриго; итальянская команда «Милан» тренируется у русского Николая; английская команда «Челси» тренируется у итальянца Антонио; испанская команда «Реал» тренируется у англичанина Марка.

Задача 8. Любители музыки

Решение

Заметим, что по условию задачи цвет банданы и рубашки совпадал только у любителя техно. А так как у любителя хаус ни рубашка ни бандана не были белыми и любитель рейв был в желтой рубашке, то делаем вывод, что любитель техно может быть в рубашке и бандане только белого цвета. Получаем граф:

Решение сводится к нахождению трех сплошных треугольников с вершинами в разных множествах. Значит у любителя хаус желтая бандана и черная рубашка (т.к. цвет совпадал только у любителя техно по усл.), а у любителя рейв черная бандана.

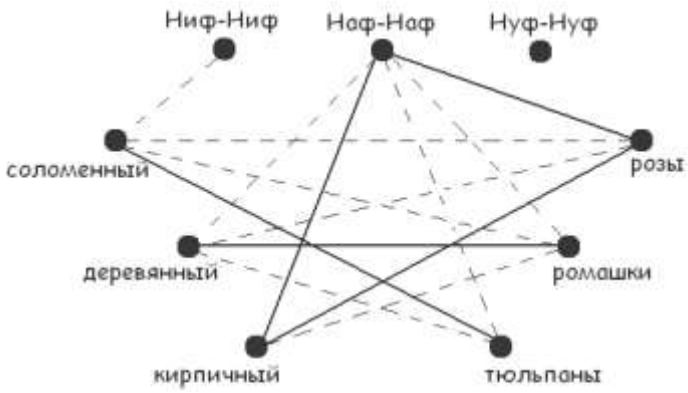


Ответ. У любителя техно рубашка и бандана белого цвета; у любителя хаус черная рубашка и желтая бандана; у любителя рейв желтая рубашка и черная бандана.

Задача 9. Три поросёнка

Решение

Из условий задачи получаем граф:



Можно сделать вывод, что возле кирпичного домика растут розы, а возле соломенного – тюльпаны. А так как Наф-Наф живет не в деревянном домике, то он и не выращивает ромашки. А так как на тюльпаны у него аллергия, то он может выращивать только розы. Внесем эти данные в чертеж и получим:

Теперь стало ясно и то, что Ниф-Ниф живет в деревянном домике и выращивает ромашки. Методом исключения получаем, что Нуф-Нуф живет в соломенном домике и выращивает тюльпаны.

Ответ. Наф-Наф живет в кирпичном домике и выращивает розы; Ниф-Ниф живет в деревянном домике и выращивает ромашки; Нуф-Нуф живет в соломенном домике и выращивает тюльпаны.

Задача 10. Компьютерные игры

Решение

Таблица с известными запретами (исходя из условия задачи):

	Максим	Настя	Саша	Рома	Сережа

Пасьянс «Паук»	-	-			
Гонки	-	-		-	-
Сапер			-	-	
«Марио»	-	-	-	-	
тетрис		-		-	

Известно, что каждый из игравших играл только в одну, значит, в каждой строке и каждом столбце таблицы может стоять только один «+».

Из условий задачи следует, что Саша не играл в «Марио»; Настя не играла ни в тетрис, ни в гонки; Рома – ни в гонки, ни в сапера; Максим – ни в пасьянс «Паук», ни в Марио.

Так как все предположения ошибочны, то Настя не играет в «Марио», Рома – в тетрис, Максим – в гонки, Сережа – в гонки, Саша – в сапера, Настя – в пасьянс «Паук», Рома – в «Марио».

Используем правило, что если в строке (или столбце) все места, кроме одного, заняты элементарным запретом (знак несоответствия, например «-»), то на свободное место нужно поставить знак «+». В строчке «гонки» можно поставить «+» напротив имени Саша, а в строчке «Марио» напротив имени Теперь становится ясно, что в пасьянс «Паук» играл Рома, в сапера – Настя, а в тетрис – Максим. Задача решена.

Ответ. Сережа играл в «Марио»; Рома – в пасьянс «Паук»; Саша – в гонки; Настя – в сапера; Максим – в тетрис.

Задача 11. Студенты

Решение

Учитывая то, что у Ромы не было мамы, можно сделать вывод, что Рома – не Карпенко, не Шевченко, не Лысенко и не Бойченко. Следовательно, он Савченко. Также, из условия задачи видно, что Карпенко парень, следовательно, он - не Дина, не Соня, и к тому же – не Коля («отец Коли уже договорился с родителями Карпенко»). Следовательно, Карпенко зовут Миша. Отметим это в таблице:

	Дина	Соня	Коля	Рома	Миша

Шевченко				-	-
Савченко	-	-	-	+	-
Бойченко				-	-
Карпенко	-	-	-	-	+
Лысенко				-	-

Как известно, в одной баскетбольной команде играют либо одни юноши, либо одни девушки. Пара «Шевченко + Бойченко» мужской быть не может, так как в качестве возможных претендентов на эти две фамилии у нас остались две девушки и один юноша. Следовательно, Шевченко и Бойченко – девушки. Получаем:

	Дина	Соня	Коля	Рома	Миша
Шевченко			-	-	-
Савченко	-	-	-	+	-
Бойченко			-	-	-
Карпенко	-	-	-	-	+
Лысенко				-	-

Значит, фамилия Коли – Лысенко. Это легко установить, взглянув на таблицу. Имеем:

	Дина	Соня	Коля	Рома	Миша
Шевченко			-	-	-
Савченко	-	-	-	+	-
Бойченко			-	-	-
Карпенко	-	-	-	-	+
Лысенко			+	-	-

Остается выяснить имя и фамилию каждой из девушек. Сопоставим два факта: «Родители дины никогда не встречались с родителями Коли (мы уже знаем, что его фамилия – Лысенко)» и «Родители Лысенко дружат с родителями Бойченко». Ясно, что Дина - не Бойченко. Следовательно, ее фамилия Шевченко, а фамилия Сони – Бойченко.

Ответ. Миша Карпенко; Рома Савченко; Коля Лысенко; Соня Бойченко; Дина Шевченко.

Задача 12. Мушкетёры

Решение

Таблица с известными запретами:

	шпажист	рукопашник	танцор	стрелок
Атос			-	-
Портос		-	-	-
Арамис			-	
Д’Артаньян				

Известно, что каждый из четырех мушкетеров был лучшим только в одном деле. Следовательно, в каждой строчке и каждом столбце может стоять только один «+». Взглянув на таблицу, сразу можно сказать, что танцор – Д’Артаньян, шпажист – Портос. Вносим эти данные в таблицу. Получаем:

	шпажист	рукопашник	танцор	стрелок
Атос	-		-	-
Портос	+	-	-	-
Арамис	-		-	
Д’Артаньян	-	-	+	-

Теперь можно сделать вывод, что стрелок – это Арамис, рукопашник – Атос.

Ответ. Арамис – стрелок; Д'Артаньян – танцор; Портос – шпажист; Атос – рукопашник.

Задача13. «Пепси», «Кока-кола», квас и «Спрайт»

Решение Из условий задачи получаем таблицу с запретами:

	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
«Пепси»	-	-		-
«Кока-кола»			-	-
Квас				
«Спрайт»	-			-

Так как каждая жидкость находится только в одном сосуде, то в в каждой строчке и каждом столбце может стоять только один «+». Взглянув на таблицу, можно сделать вывод, что «Пепси» в кувшине, а квас в банке. Получаем новую таблицу:

	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
«Пепси»	-	-	+	-
«Кока-кола»			-	-
Квас	-	-	-	+
«Спрайт»	-		-	-

Теперь можно сказать, что «Спрайт» в стакане, а «Кока-кола» в бутылке.

Ответ. Квас в банке; «Пепси» в кувшине; «Кока-кола» в бутылке; «Спрайт» в стакане.

Задача 14. «Евровидение-2009»

Решение

Так как все ответы стран были ложными, то известно, что Азербайджан занял не первое место, Исландия заняла второе место, Турция заняла четвертое место. Внесем эти данные в таблицу:

	I	II	III	IV
Норвегия		-		-
Исландия		+		-
Азербайджан	-	-		-
Турция	-	-	-	+

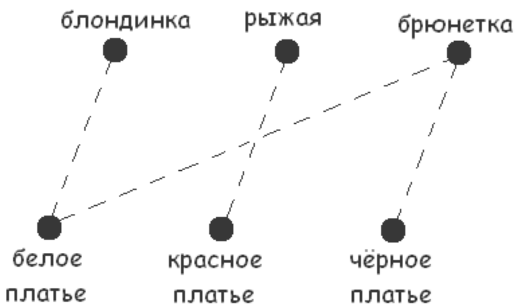
Делаем вывод, что Азербайджан занял третье место, а Норвегия – первое место.

Ответ. Норвегия – первое место; Исландия – второе место; Азербайджан – третье место; Турция – четвертое место.

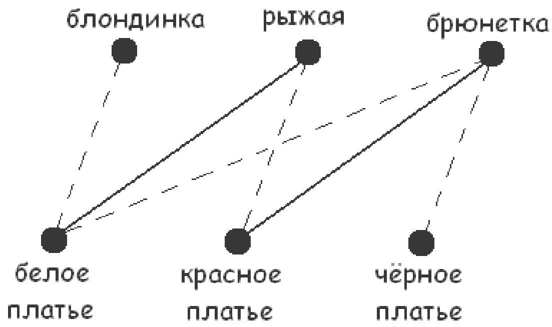
Задача15. "Виа Гра"

Решение

Учитывая условия задачи, получаем следующий граф:



Используем правило: если какая-то точка оказывается соединенной с двумя точками другого множества штриховыми линиями, то с третьей точкой она должна быть соединена сплошной. Поэтому граф на рисунке будет выглядеть следующим образом:



Теперь можно сделать вывод, что брюнетка в красном платье, блондинка – в черном, а рыжая – в белом. Задача решена.

Ответ. Брюнетка в красном платье, блондинка – в черном, рыжая – в белом.

Задача 16. «Мир музыки»

Решение

Изобразим эти множества на кругах Эйлера.

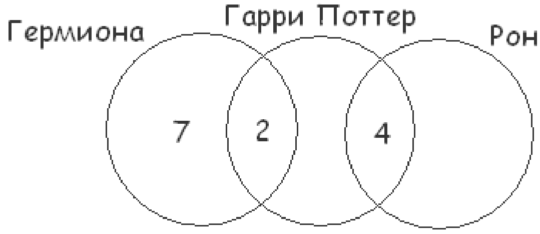
Теперь посчитаем: Всего внутри большого круга 35 покупателей, внутри двух меньших 35–10=25 покупателей. По условию задачи 20 покупателей купили новый диск певицы Максим, следовательно, 25 – 20 = 5 покупателей купили только диск Земфиры. А в задаче сказано, что 11 покупателей купили диск Земфиры, значит 11 – 5 = 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры:

Ответ: 6 покупателей купили диски и Максим, и Земфиры.

Задача17. Гарри Поттер, Рон и Гермиона

Решение

Учитывая условия задачи, чертеж будет таков:



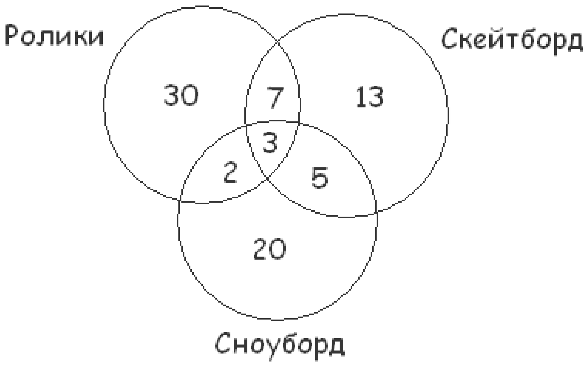
Так как Гарри Поттер всего прочитал 11 книг, из них 4 книги читал Рон и 2 книги – Гермиона, то 11 – 4 – 2 = 5 – книг прочитал только Гарри. Следовательно,

26 – 7 – 2 – 5 – 4 = 8 – книг прочитал только Рон.

Ответ. 8 книг прочитал только Рон.

Задача 18. Экстрим

Решение

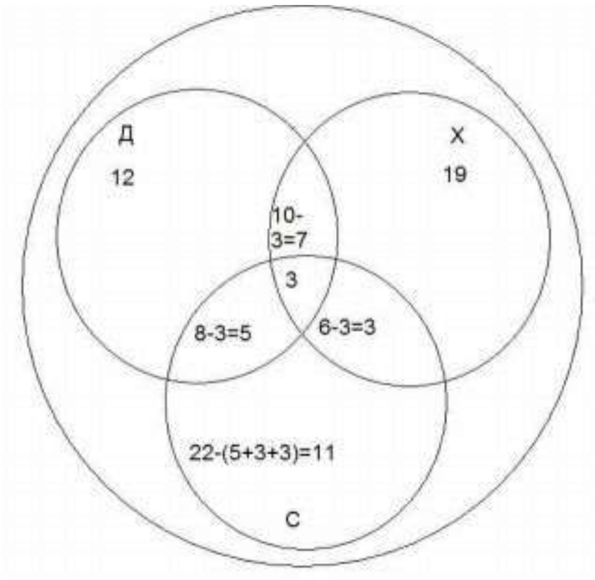


Всеми тремя спортивными снарядами владеют три человека, значит, в общей части кругов вписываем число 3. На скейтборде и на роликах умеют кататься 10 человек, а 3 из них катаются еще и на сноуборде. Следовательно, кататься только на скейтборде и на роликах умеют 10-3=7 ребят. Аналогично получаем, что только на скейтборде и на сноуборде умеют кататься 8-3=5 ребят, а только на сноуборде и на роликах 5-3=2 человека. Внесем эти данные в соответствующие части. Определим теперь, сколько человек умеют кататься только на одном спортивном снаряде. Кататься на сноуборде умеют 30 человек, но 5+3+2=10 из них владеют и другими снарядами, следовательно, только на сноуборде умеют кататься 20 ребят. Аналогично получаем, что только на скейтборде умеют кататься 13 ребят, а только на роликах – 30 ребят. По условию задачи всего 100 ребят. 20+13+30+5+7+2+3=80 – ребят умеют кататься хотя бы на одном спортивном снаряде. Следовательно, 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном снаряде.

Ответ. 20 человек не умеют кататься ни на одном спортивном снаряде.

Задача 19.

Решение:



Д-драмкружок, Х-хор, С-спорт. В круге Д-27 ребят, в круге Х-32 человека, в круге С-22 ученика. Те 10 ребят из драмкружка, которые поют в хоре, окажутся в общей части кругов Д и Х. Трое из них еще и спортсмены, они окажутся в общей части всех трех кругов. Остальные семеро спортом не увлекаются. Аналогично, 8-3=5 спортсменов, не поющих в хоре и 6-3=3, не посещающих драмкружок. Легко видеть, что 5+3+3=11 спортсменов посещают хор и драмкружок, 22-(5+3+3)=11 заняты только спортом;

70-(11+12+19+7+3+3+5)=10 не поют в хоре, не занимаются в драмкружке, не увлекаются спортом.

Ответ: 10 человек.

Задача20. Алиса, Лев и Единорог

Ответ:

Лев мог сказать, что он лгал накануне, только в понедельник и в четверг.

Единорог мог сказать, что он лгал накануне, только в четверг и в воскресенье. Следовательно, они оба могли утверждать, что лгали накануне, только в четверг.

Задача21. Перетягивание каната

Решение:

Приходится анализировать варианты. Это можно делать по-разному. Можно выяснить, возможно ли, чтобы в первом ответе первая часть была правдой, а вторая ложью и так далее. Однако удобнее проверить, возможно ли, чтобы тот или иной мальчик занял то или иное место. Чаще всего в ответах упоминаются Андрей и Геннадий. С любого из них и нужно начать. Начнем, например, с Андрея. Именно рассмотрим, мог ли Андрей занять первое место, мог ли второе, мог ли третье, мог ли четвертое.

Пусть Андрей занял первое место. Тогда в первом ответе первая часть – правда, а значит, вторая часть – неправда, то есть Борис – не второй (но и не первый, так как первый – Андрей), а третий или четвертый. Во втором ответе первая часть – неправда, так как Андрей – не второй, а первый. Значит, во втором ответе вторая часть – правда, откуда получается, что Геннадий – третий. Поэтому Борис – не третий, а четвертый, и мы получаем такое распределение:

Андрей – первый, Вадим – второй, Геннадий – третий, Борис – четвертый. Осталось с этой точки зрения просмотреть третий ответ. "Вадим – второй" – правда, "Геннадий – четвертый" – неправда. Все сходится. Но, быть может, Андрей мог быть и вторым? Нет, так как тогда первый ответ был бы полностью ложным.

Не мог быть Андрей и третьим, так как тогда полностью ложен второй ответ.

Не мог быть Андрей и четвертым, что доказать несколько труднее – нужно сопоставлять разные ответы. Из первого следует, что Борис – второй, из второго – что Геннадий – третий, но тогда полностью лжив третий ответ.

Ответ:

Андрей – первый, Вадим – второй, Геннадий – третий, Борис – четвертый.

Задача 22. Поход в кино

Решение, ответ:

Найдем, сколько человек НЕ ходило в кино. Это количество складывается из тех, кто ходил только в музей, и кто не ходил никуда. Только в музей ходило 23-6 = 17 человек. Никуда не ходили 2 человека. Т.е. 17+2 = 19 человек не ходили в кино. Соответственно, 30-19 = 11 человек ходили в кино.

Задача 23. Про школьников

Решение:

Всего 35 учеников. 10 кружки не посещают. Значит, посещают кружки 35-10=25 учеников.

25 учеников посещают кружки. 20 учеников занимаются в математическом кружке. Значит, только литературный кружок посещают 25-20=5 человек. В литературном кружке 11 человек. Лишь 5 из них посещают только литературный кружок.

Значит, 11-5 = 6 человек-литераторов посещают ещё и математический кружок.

Задача № 24.

Решение:

После выслушивания ответов учеников, решивших задачу, учитель предлагает сделать запись решения в виде таблицы, в которой устанавливается соответствие занятого места и героя задачи. Запись в таблице – (1) означает, что Коля не занял первое место, и это следует из 1) условия задачи.

	I	II	III	IV
Коля	– (1)	– (2)	+	– (1)
Боря	– (2)	+ (2)	– (2)	– (2)
Вова	+	– (2)	– (1)	– (3)
Юра	– (3)	– (2)	– (1)	+

Из условия, что “Боря занял второе место” следует, что он не занял ни первое, ни третье, ни четвертое место, а так же следует, что второе место не занял ни Коля, ни Вова, ни Юра.

Из первого условия, что “Коля занял ни первое, ни последнее место” следует, что Коля занял третье место, и тогда ни Вова, ни Юра не могут быть на третьем месте. Из третьего условия, что “Вова не был последним” следует, что Вова был на первом месте, а Юра был последним.

Задача № 25.

Решение:

После выслушивания ответов учеников, решивших задачу, учитель предлагает сделать анализ решения в виде таблицы, которая будет содержать все возможные варианты виновности одного из участников игры, и которая позволит оценить истинность высказываний героев задачи.

Назовем высказывание: Коля сказал: “Это не я ”- А, а высказывание: Олег сказал: “Это Петя ”- Б. Возможную виновность обозначим знаком +.

Коля	Олег	Петя	А	Б
+	–	–	ложь	ложь
–	+	–	истина	ложь
–	–	+	истина	истина

Если окно разбил Коля, значит оба высказывания А и Б ложны.

Если окно разбил Олег, значит А – истинно, Б – ложно.

Если виноват Петя, значит и А и Б – истинны.

По условию задачи одно высказывание истинно, а другое ложно, значит,

окно разбил Олег.

Задача 26.

Решение:

Решение задачи 7 можно оформить таблицей, в которой предполагается первенство каждого из героев задачи, и на основе этого определяется истинность или ложность их высказываний.

I место занял	Истинность или ложность высказываний			
	Алексея	Бориса	Владимира	Григория
Алексей	*ложь*	*истина*	*ложь*	*истина*
Борис	*истина*	*истина*	*ложь*	*истина*
Владимир	*истина*	*истина*	*истина*	*истина*

Григорий	*истина*	*ложь*	*ложь*	*ложь*

Если предположить, что Алексей занял первое место, то он солгал и солгал Владимир, а это противоречит условию, что солгал только один участник, значит, Алексей сказал правду.

Если первым оказался Борис, то солгал только Владимир – это полностью удовлетворяет условию задачи.

Если Владимир сказал правду, то и все остальные сказали правду – этого не может быть.

Если Григорий занял первое место, то солгали Григорий и Владимир.

Ответ: Правду сказали все, кроме Владимира. Первым был Борис.

Задача 27.

Решение.

Составим таблицу 6 x 4 и из первого четверостишия делаем выводы:

1) медведь, рысь, белка не дарили иголку и колечко;

2) мышка, волк, овца не дарили подсвечник и тарелку.

Получаем таблицу:

	Медведь	Рысь	Белка	Мышка	Волк	Овца
Подсвечник	-	+	-	-	-	-
Иголка	-	-	-	+	-	-
Тарелка	+	-	-	-	-	-
Кольцо	-	-	-	-	-	+

Ответ: виден из таблицы.

Задача 28.

Решение.

Составим таблицу и отразим в ней условия задачи, заполнив

соответствующие клетки буквами Л и И, в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание.

Так как музыкантов трое, инструментов шесть и каждый владеет только двумя инструментами, получается, что каждый музыкант играет на инструментах, которыми остальные не владеют.

Из условия 4 следует, что Смит не играет ни на альте, ни на трубе, а из условий 3 и 5, что Браун не умеет играть на скрипке, флейте, трубе и гобое. Следовательно, инструменты Брауна — альт и кларнет. Занесем это в таблицу, а оставшиеся клетки столбцов "альт" и "кларнет" заполним "Л":

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	Л	Л	И	И	Л	Л
Смит			Л	Л		Л
Вессон			Л	Л		

Из таблицы видно, что на трубе может играть только Вессон.

Из условий 1 и 2 следует, что Смит не скрипач. Так как на скрипке не играет ни Браун, ни Смит, то скрипачом является Вессон. Оба инструмента, на которых играет Вессон, теперь определены, поэтому остальные клетки строки "Вессон"

можно заполнить нулями:

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	Л	Л	И	И	Л	Л
Смит	Л		Л	Л		Л
Вессон	И	Л	Л	Л	Л	И

Из таблицы видно, что играть на флейте и на гобое может только Смит.

	скрипка	флейта	альт	кларнет	гобой	труба
Браун	Л	Л	И	И	Л	Л
Смит	Л	И	Л	Л	И	Л
Вессон	И	Л	Л	Л	Л	И

Ответ: Браун играет на альте и кларнете, Смит — на флейте и гобое, Вессон— на скрипке и трубе.

Задача 29.

Решение.

Составим таблицу 3 х 3, выбрав основными параметрами имена и города. Тогда, учитывая, что рязанец – не физик, а туляк – литератор, получаем, что рязанец – математик, а житель Ярославля – физик.

	Рязань	Тула	Ярославль
Владимир	- м	+ л	- Ф
Игорь	- м	- л	+ Ф
Сергей	+ м	- л	- Ф

Ответ: виден из таблицы.

Задача 30.

Решение.

Имеется три утверждения:

Вадим изучает китайский;

Сергей не изучает китайский;

Михаил не изучает арабский.

Если верно первое утверждение, то верно и второе, так как юноши изучают разные языки. Это противоречит условию задачи, поэтому первое утверждение ложно.

Если верно второе утверждение, то первое и третье должны быть ложны. При этом получается, что никто не изучает китайский. Это противоречит условию, поэтому второе утверждение тоже ложно.

Остается считать верным третье утверждение, а первое и второе — ложными.

Следовательно, Вадим не изучает китайский, китайский изучает Сергей.

Ответ: Сергей изучает китайский язык, Михаил — японский, Вадим — арабский.

Задача 31.

Решение.

Составим таблицу и отразим в ней условия 1 и 4, заполнив клетки буквами Л и И в зависимости от того, ложно или истинно соответствующее высказывание:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
Л			Джуди			
			Айрис			
	Л		Линда		Л	

Далее рассуждаем следующим образом. Так как Линда живет не в Риме, то, согласно условию 3, она не певица. В клетку, соответствующую строке "Линда" и столбцу "Пение", ставим Л. Из таблицы сразу видно, что Линда киноактриса, а Джуди и Айрис не снимаются в кино.

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
Л			Джуди			Л
			Айрис			Л

Л	Линда	Л	Л	И

Согласно условию 2, парижанка не снимается в кино, следовательно, Линда живет не в Париже. Но она живет и не в Риме. Следовательно, Линда живет в Чикаго. Так как Линда и Джуди живут не в Париже, там живет Айрис. Джуди живет в Риме и, согласно условию 3, является певицей. А так как Линда киноактриса, то Айрис балерина.

В результате постепенного заполнения получаем следующую таблицу:

Париж	Рим	Чикаго		Пение	Балет	Кино
Л	Л	И	Джуди	И	Л	Л
И	Л	Л	Айрис	Л	И	Л
Л	Л	И	Линда	Л	Л	И

Ответ: Айрис балерина. Она живет в Париже.

Задача 32.

Ответ: 8 человек не знают ни английский, ни немецкий язык.

Задача 33.

Из 40 учащихся нашего класса 32 любят молоко, 21 - лимонад, а 15 - и молоко, и лимонад. Сколько ребят в нашем классе не любят ни молоко, ни лимонад?

Решение:

32- 15 = 17 чел. любят только молоко,

21- 15 = 6 чел. любят только лимонад,

40 – (17 + 6 + 15) = 40 – 38= 2

Ответ: 2 человека в классе не любят ни молоко, ни лимонад.

Задача 34.

Ответ: 28 человек в классе.

Задача 35.

Ответ: 7 одноклассников смотрят одни «мультики».

Задача 36.

Ответ: 35% кроликов не прочь полакомиться только капустой

Задача 37.

Ответ: 5 учеников этого класса любят яблоки.

Задача 38.

Ответ: 1 девушка была красивая и в то же время добрая.

Задача 39.

Ответ: 70 человек знают три языка.

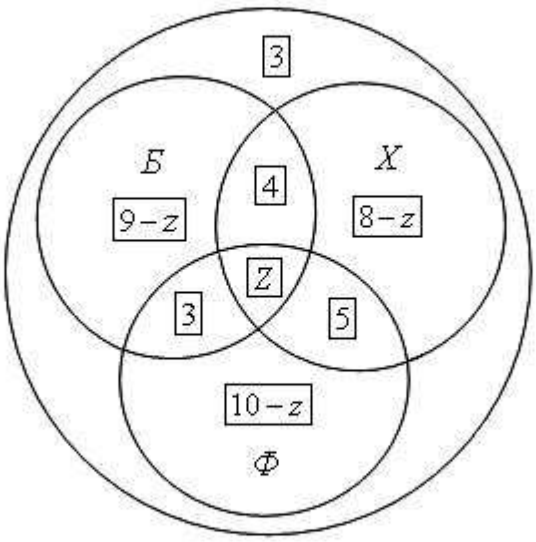
Задача 40.

Ответ: 2 человека посетили и Италию, и Францию.

Задача 41.

Решение.

Воспользуемся кругами Эйлера.



Пусть большой круг изображает всех учащихся класса,
а три меньших круга *Б, Х* и *Ф* изображают соответственно баскетболистов, хоккеистов и футболистов.

Тогда фигура Z, общая часть кругов *Б*, *Х* и *Ф*, изображает ребят, увлекающихся тремя видами спорта.
Из рассмотрения кругов Эйлера видно, что одним лишь видом спорта - баскетболом занимаются $16 - (4 + z + 3) = 9 - z$;
одним лишь хоккеем $17 - (4 + z + 5) = 8 - z$;
одним лишь футболом $18 - (3 + z + 5) = 10 - z$.

Составляем уравнение, пользуясь тем, что класс разбился на отдельные группы ребят; количества ребят в каждой группе обведены на рисунке рамочкам:

$3 + (9 - z) + (8 - z) + (10 - z) + 4 + 3 + 5 + z = 38,\ z = 2.$

Таким образом, двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта.

Складывая числа $9 - z$, $8 - z$ и $10 - z$, где $z = 2$, найдем количество ребят, увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.

Ответ.

Двое ребят увлекаются всеми тремя видами спорта человека.
Увлекающихся лишь одним видом спорта: 21 человек.

Задача 42.

Решение. Рассмотрим таблицу 4×4. В левом столбце таблицы напишем фамилии друзей (обозначив их первой буквой), в верхней строке – их имена (также обозначив их первой буквой). Если человек с данной фамилией по условию задачи не может иметь данного имени, то поставим знак минус в соответствующей клетке таблицы.

Поскольку ни у одного из друзей имя не совпадает с фамилией, поставим знак минус в клетках вдоль диагонали. Поскольку Владимиров обращался к Борису, то имя

Владимирова не Борис. Поставим минус в соответствующей клетке.

	А	Б	В
А	–		
Б		–	
В		–	–

Поскольку каждый из друзей имеет одно и только одно имя, в каждой строке и в каждом столбце таблицы должен быть единственный знак плюс (плюс означает, что человек с данной фамилией имеет имя, соответствующей данной клетке таблицы). В третьей строке два минуса, следовательно, в оставшейся клетке этой строки должен быть плюс, то есть Владимирова зовут Александром. В первом столбце уже есть один плюс, следовательно, в оставшейся клетке этого столбца стоит минус, то есть Борисова зовут не Александром. Во втором столбце уже два минуса, следовательно, в оставшейся клетке стоит плюс, то есть Александрова зовут Борисом. Во второй строке два минуса, следовательно, в оставшейся клетке должен стоять плюс, то есть Борисова зовут Владимиром.

	А	Б	В
А	–	+	–
Б	–	–	+
В	+	–	–

Последняя таблица дает нам решение задачи: Александрова зовут Борисом, Борисова – Владимиром, Владимирова – Александром.

Задача 43.

Решение. Составим логическую таблицу 5×5, аналогичную той, которую мы составили при решении примера 7. В первом столбце напишем имена друзей, обозначив их первой буквой, в верхней строке напишем названия факультетов, также обозначив их первой буквой.

Если данный студент по условию задачи не может учиться на данном факультете, поставим в данной клетке знак минус, если данный студент учится на данном факультете, ставим в клетке плюс. При этом в каждой строке и в каждом столбце должен быть единственный плюс.

	М	И	Б	Ф
А				
Б				
В				
Г				

Поскольку математик сидел напротив Василия, рядом с историком, Василий не может быть ни математиком, ни историком. Поставим в соответствующих клетках минус. Поскольку биолог сидел рядом с Андреем, то Андрей не биолог.

Поскольку соседями Григория были Борис и филолог, то Борис и Григорий не филологи.

	М	И	Б	Ф
А			–	
Б				–
В	–	–		
Г				–

На сей раз нам не удастся так однозначно расставить плюсы, как мы это сделали при решении предыдущего примера. Поскольку по условию задачи Василий не математик и не историк, он может быть либо биологом, либо филологом. Пусть Василий филолог. Тогда таблица примет вид:

	М	И	Б	Ф
А			–	
Б				–
В	–	–		+
Г				–

Очевидно, что в этом случае Василий не биолог и Андрей не может быть филологом. Поставим минусы в соответствующих клетках.

	М	И	Б	Ф
А			–	–
Б				–
В	–	–	–	+
Г				–

Из условий задачи следует, что Борис и филолог сидели друг против друга, но так как по нашему предположению Василий является филологом, то Василий и Борис сидят напротив друг друга. Но поскольку напротив Василия сидит математик, то математиком является Борис и таблица примет вид:

	М	И	Б	Ф

А			–	–
Б	+			–
В	–	–	–	+
Г				–

Но тогда Борис не является ни историком, ни биологом. Поставим минусы в соответствующих клетках таблицы:

	М	И	Б	Ф
А			–	–
Б	+	–	–	–
В	–	–	–	+
Г				–

Но тогда биологом является Григорий (больше некому) и, следовательно, Григорий не является ни историком, ни математиком, математиком не является и Андрей, и таблица примет вид:

	М	И	Б	Ф
А	–	+	–	–
Б	+	–	–	–
В	–	–	–	+
Г	–	–	+	–

Тогда Андрей является историком. На первый взгляд, мы получили решение задачи: Андрей – историк, Борис – математик, Василий – филолог, Григорий - биолог. Однако, поскольку по условию задачи биолог сидит рядом с Андреем, то рядом сидят Григорий и Андрей. С другой стороны, напротив друг друга сидят математик и Василий, то есть Борис и Василий сидят напротив друг друга. Тогда напротив друг друга должны сидеть Андрей и Григорий. Мы получили противоречие, следовательно, наше предположение о том, что Василий филолог, оказалось неверным, следовательно, Василий биолог. Таблица примет вид:

	М	И	Б	Ф

А			–	
Б				–
В	–	–	+	
Г				–

Тогда Василий не филолог и, следовательно, филологом является Андрей, а тогда Андрей не является ни математиком, ни историком. Биологом не являются ни Борис, ни Григорий. Таблица примет вид:

	М	И	Б	Ф
А	–	–	–	+
Б			–	–
В	–	–	+	–
Г			–	–

По условию задачи напротив друг друга сидят филолог и Борис, но, поскольку филологом является Андрей, то получается, что напротив друг друга сидят Андрей и Борис, а следовательно, напротив друг друга сидят и Василий с Григорием. Но напротив Василия сидит математик, следовательно, математиком является Григорий. Тогда Борису остается быть только историком. Таблица окончательно выглядит так:

	М	И	Б	Ф
А	–	–	–	+
Б	–	+	–	–
В	–	–	+	–
Г	+	–	–	–

Таким образом, Андрей – филолог, Борис – историк, Василий – биолог, Григорий – математик. Напротив друг друга сидят Андрей и Борис, Василий и Григорий.

Список использованной литературы

1. "Старинные занимательные задачи" С.Н. Олехник, Ю.В. Нестеренко, М.К. Потапов, 1988, 153 стр.
2. "В царстве смекалки" Е.И. Игнатьев, 1978, 195 стр.
3. "Занимательная АЛГЕБРА" Я.И. Перельман, 1975, 200 стр.

Глава 3.

задачи со спичками

Глава 3. Задачи со спичками

Предмет математики настолько серьезен, что нельзя упускать случая сделать его немного занимательным.

Блез Паскаль

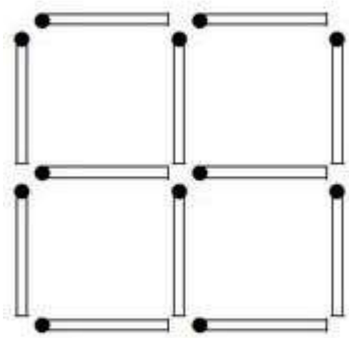
Задачи со спичками – это универсальные задачи, которые интересны как взрослым, так и детям. Разгадывая, на первый взгляд простую за условием задачу, мы развиваем внимание и логическое мышление, с помощью которых можем получить правильный ответ.

Задачи со спичками всегда воспринимаются детьми с удовольствием. Решаются относительно легко, очень интересны и главное, развивают логику.

Также, эти задачи, можно решать на математических кружках, факультативах, подготовке к олимпиаде по математике и просто на уроках математики.

Желаю Вам интересного времяпровождения!

Задача 1.



Двенадцать спичек выложены так, как показано на рисунке. Сколько здесь квадратов?

Выполните следующие задания:

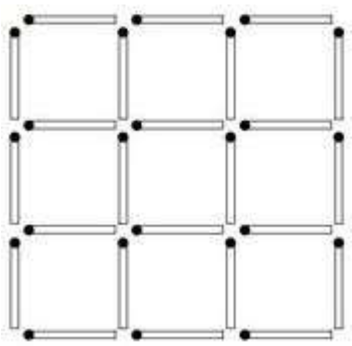
а) уберите 2 спички так, чтобы образовалось 2 неравных квадрата;

б) переложите 3 спички так, чтобы образовалось 3 равных квадрата;

в) переложите 4 спички так, чтобы образовалось 3 равных квадрата;

г) переложите 2 спички так, чтобы образовалось 7 квадратов;

д) переложите 4 спички так, чтобы образовалось 10 квадратов.



Задача 2.

Двадцать четыре спички выложены так, как показано на рисунке. Сколько здесь квадратов? Выполните следующие задания:

а) уберите 4 спички так, чтобы образовалось 4 маленьких квадрата и один большой;

б) уберите 4 спички так, чтобы образовалось 5 равных квадратов;

в) уберите 6 спичек так, чтобы образовалось 5 равных квадратов;

г) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 5 равных квадратов;

д) переложите 12 спичек так, чтобы образовалось 2 равных квадрата;

е) уберите 6 спичек так, чтобы образовалось 2 квадрата и 2 равных неправильных шестиугольника;

ж) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 4 равных квадрата (два решения);

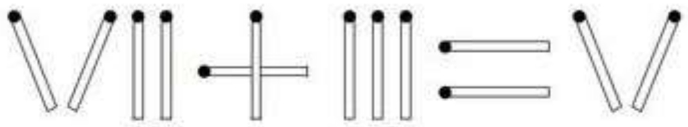
з) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 3 квадрата;

и) уберите 6 спичек так, чтобы образовалось 3 квадрата;

к) уберите 8 спичек так, чтобы образовалось 2 квадрата (два решения).

Задача 3.

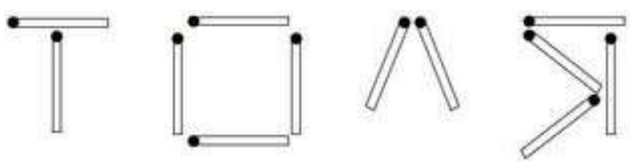
На рисунке изображено неверное равенство, составленное из спичек.



Переложите одну спичку так, чтобы равенство стало верным. (Возможны два решения.)

Задача 4.

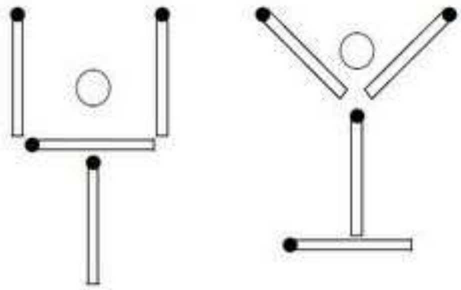
Из двенадцати спичек сложено имя «ТОЛЯ».



Переложите одну спичку так, чтобы получилось женское имя.

Задача 5.

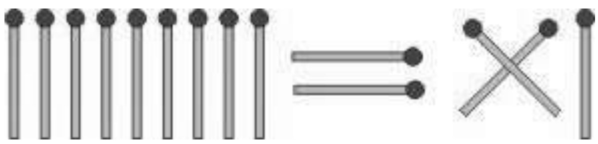
И «бокал» (см. левый рисунок), и «рюмка» (см. правый рисунок) составлены из четырех спичек. Внутри каждого «сосуда» — вишенка. Как нужно переместить «бокал» и «рюмку», переложив по две спички в каждом из них, чтобы вишенки оказались снаружи?



Задача 6.

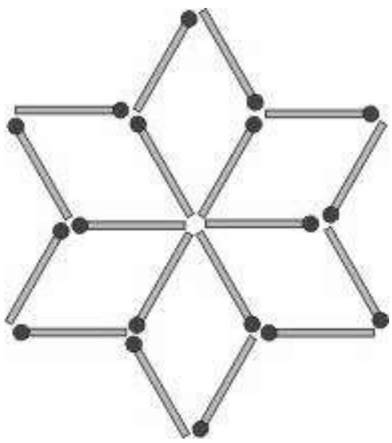
Переложите одну спичку, чтобы равенство стало верным

(это можно сделать двумя способами):



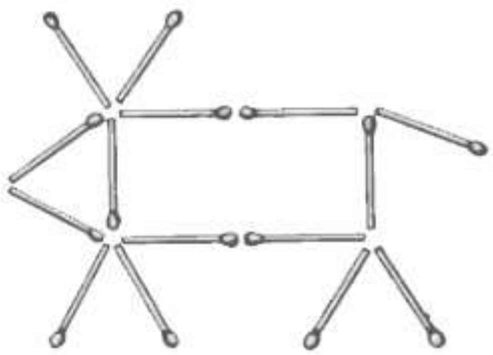
Задача 7.

В фигуре, представленной на рисунке, нужно так переложить 6 спичек с одного места на другое, чтобы образовалась фигура, составленная из 6 одинаковых четырехугольников.



Задача 8.

Корова на лугу

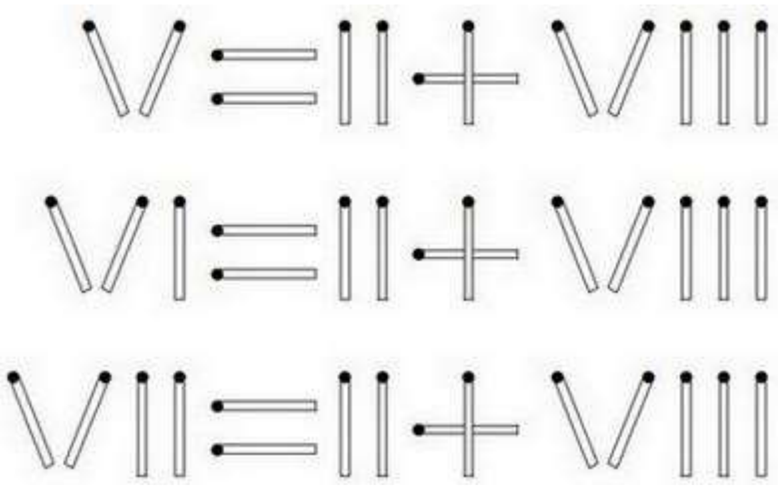


На рисунке вы видите корову, у которой есть все, что полагается: голова, туловище, ноги, рога и хвост. Корова на рисунке смотрит влево.

Переложите ровно две спички так, чтобы она смотрела вправо.

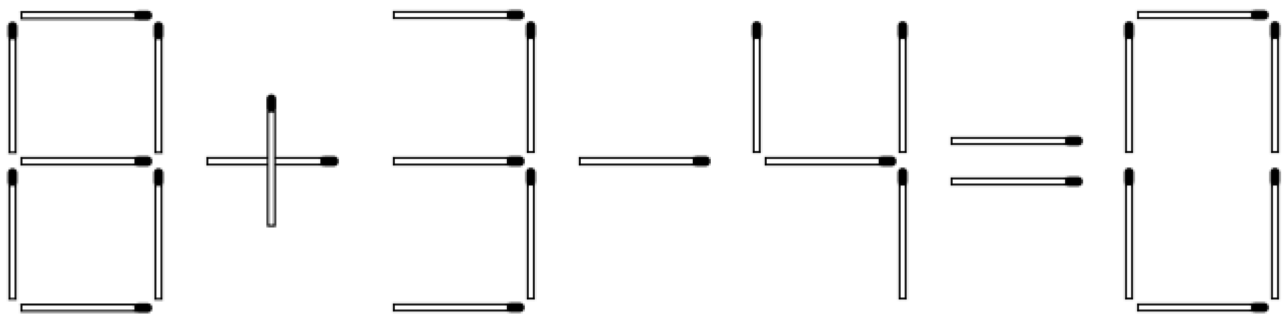
Задача 9.

Из спичек составлены три неверных равенства (см. рисунок). Переставьте в каждом ряду по одной спичке так, чтобы все равенства стали верными. Можно смещать части формулы без изменения рисунка.



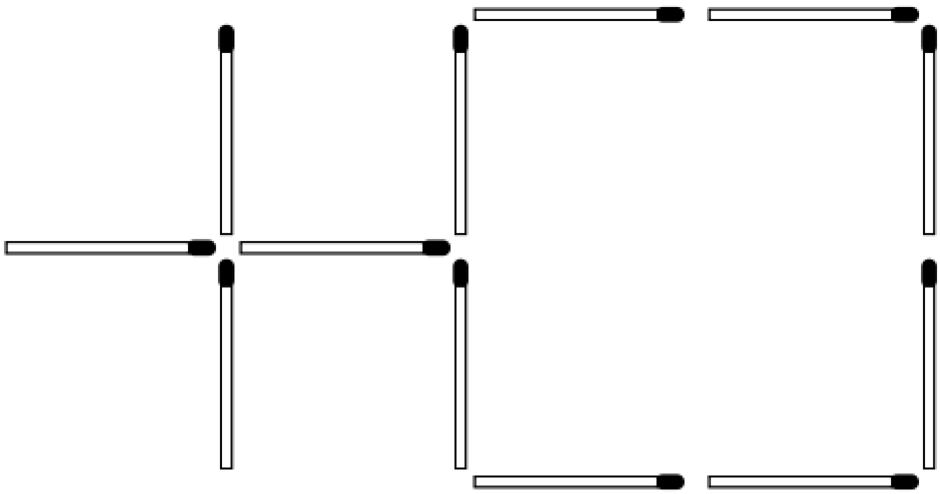
Задача 10. (8 + 3 – 4 = 0)

Нужно переложить одну спичку так, чтобы получилось верное равенство:



Задача 11. Три квадрата

Переложить в фигуре, показанной на рисунке, пять спичек так, чтобы получилось три квадрата:

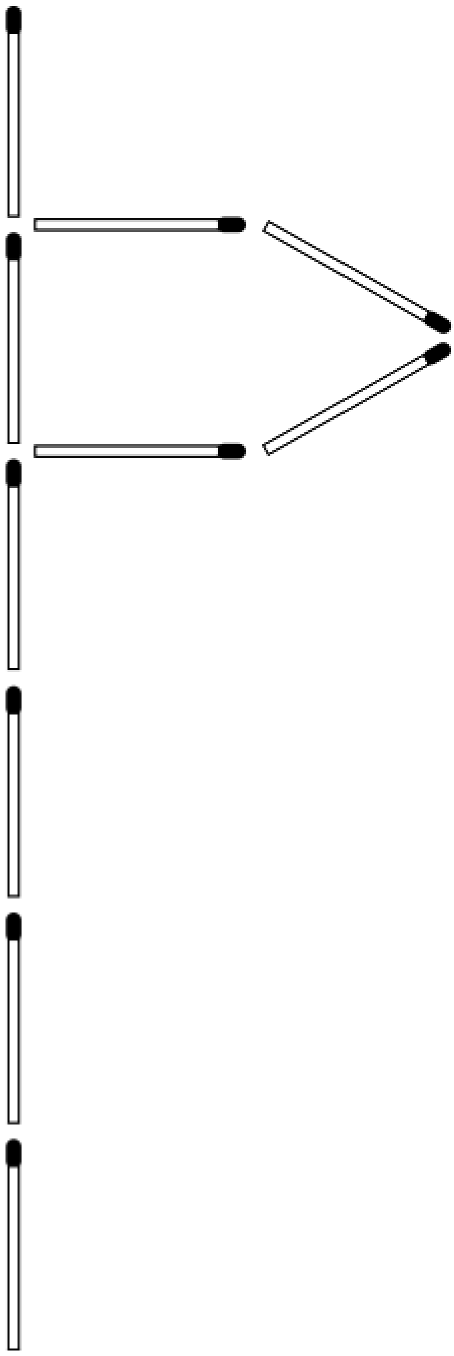


Задача12. Из девяти спичек

Из 9 спичек составить 6 квадратов.

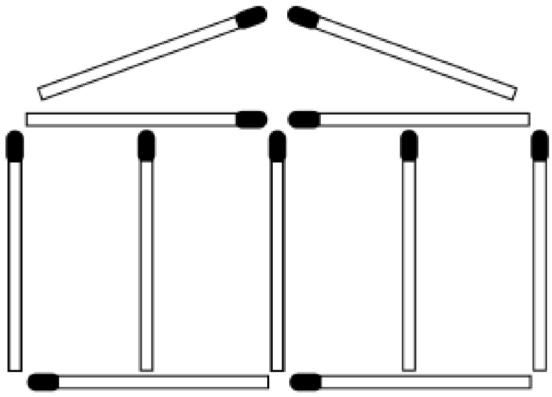
Задача13. Флюгер

Флюгер составлен из десяти спичек. Переложить четыре спички так, чтобы получился дом.



Задача14. Греческий храм

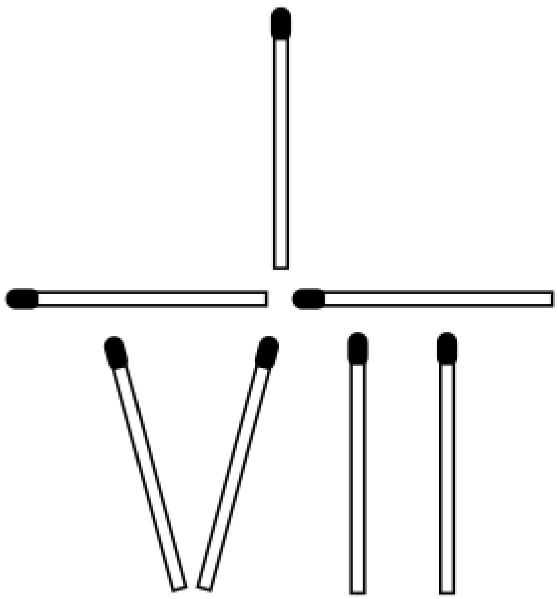
Этот храм построен из одиннадцати спичек:



Требуется переложить четыре спички так, чтобы получилось пятнадцать квадратов.

Задача15. Одна седьмая

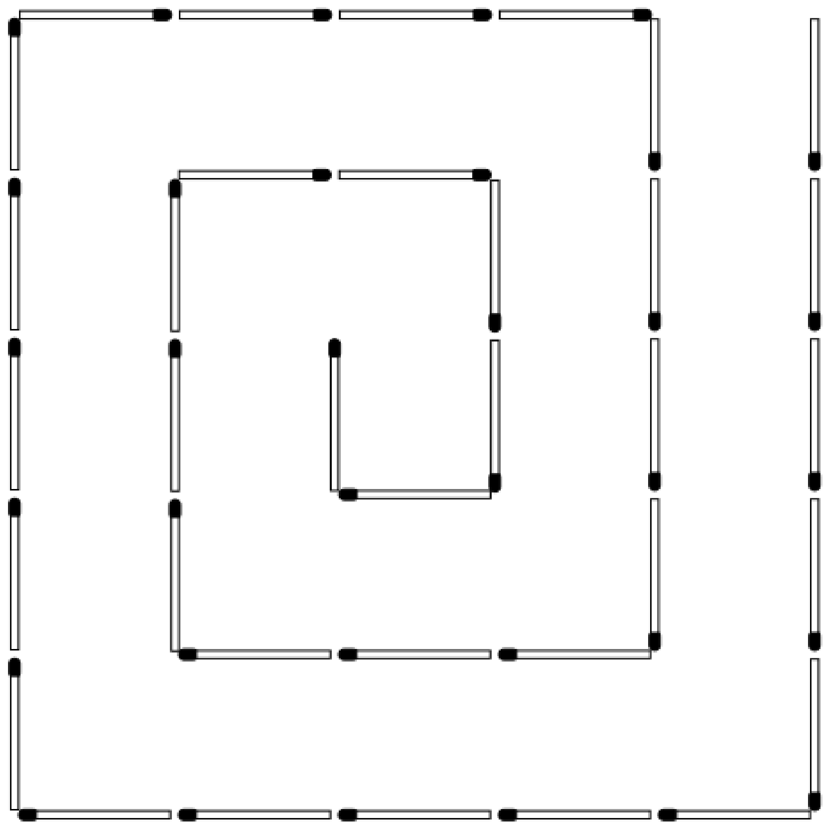
Из семи спичек выложено число $^1/_7$:



Превратите эту дробь в число $^1/_3$, не прибавляя и не убавляя спичек.

Задача 16. Спираль из спичек

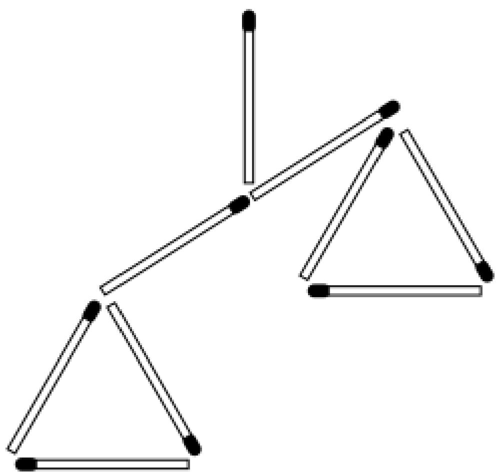
Из 35 спичек выложена фигура, напоминающая «спираль»:



Переложите 4 спички так, чтобы образовалось 3 квадрата.

Задача 17. Спичечные весы

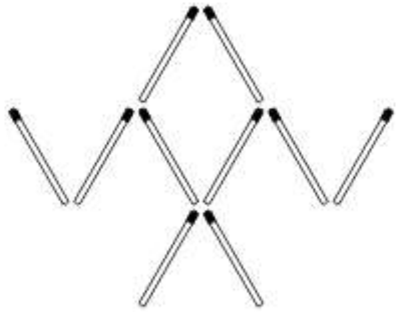
Весы составлены из девяти спичек и не находятся в состоянии равновесия:



Требуется переложить в них пять спичек так, чтобы весы оказались в равновесии.

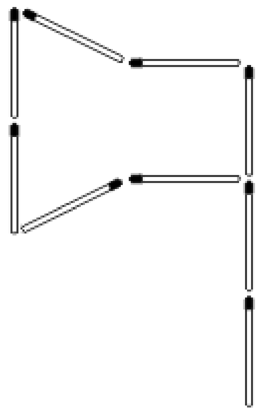
Задача 18. Спичечный рак

Спичечный рак ползёт вверх. Переложить три спички так, чтобы он пополз вниз.



Задача 19. Топор из спичек

Переложив четыре спички, превратить топор в три равных треугольника:

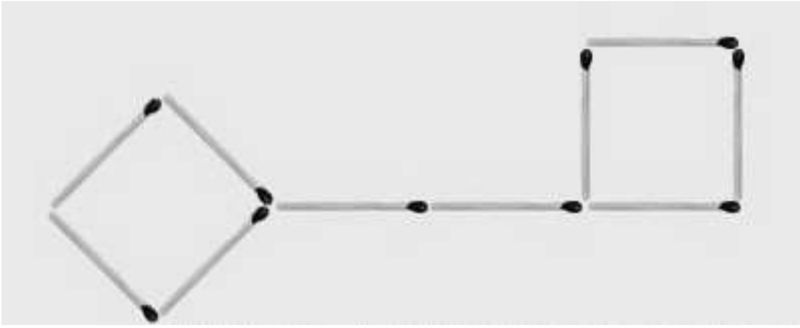


Задача 20.

Переложите 3 спички, чтобы стрела поменяла своё направление на противоположное.

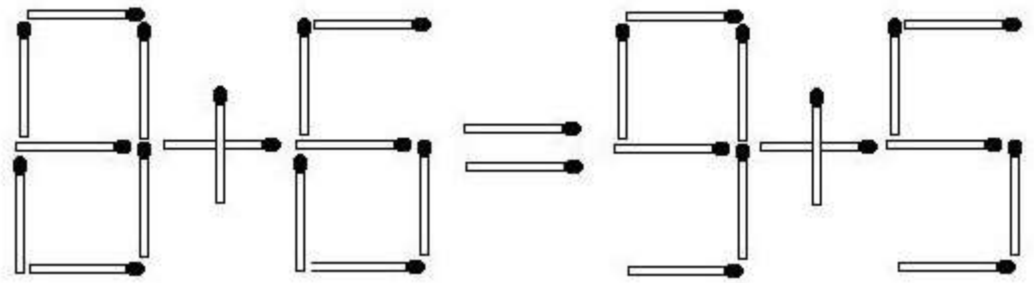
Задача 21. Ключ и три квадрата

Спички разложены в форме ключа.
Переставьте четыре спички так, чтобы из ключа получилось три квадрата:

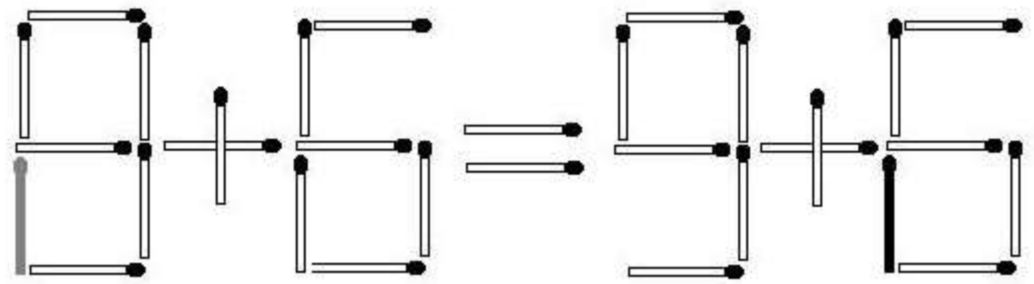


Задача 22.

Здесь дано верное равенство. Переложите одну спичку, чтобы вышло тождество (тождество – всегда верное равенство, ни от чего не зависящее. Примеры тождеств: 1=1, a+b=a+b.) . Затем переложите 2 спички, получится еще одно тождество.

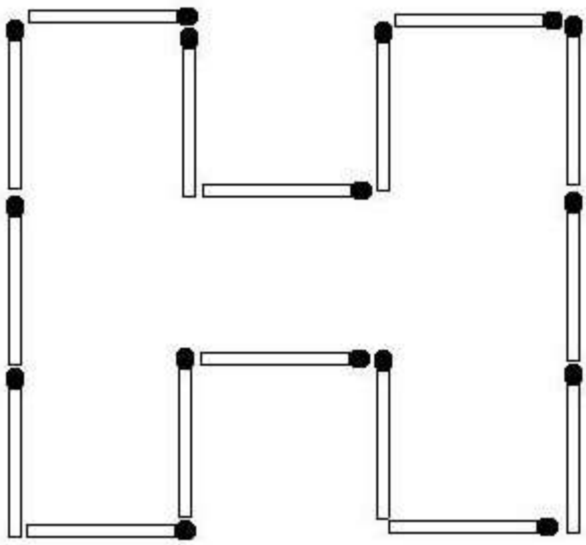


переложим одну спичку, получим тождество 9+6=9+6 на рисунке. Затем если переложить еще 2 спички, можно получить тождества вида 3+8=3+8, 9+9=9+9 и т.д.



Задача 23.

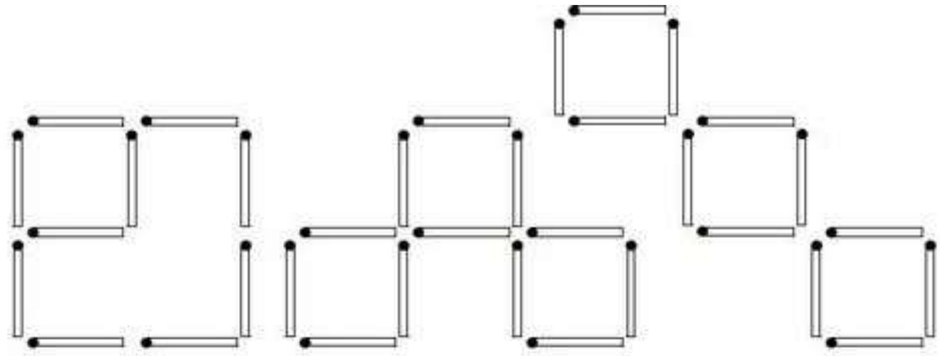
На рисунке изображена фигура, напоминающая букву «Н». Переложите 4 спички так, чтобы получить 2 квадрата (в этой, как и во всех следующих задачах имеется в виду, что останутся только те фигуры, которые указаны в условии. То есть, оставить два квадрата не значит, что останутся два квадрата и прямоугольник или даже отдельная спичка). Имеется два решения.



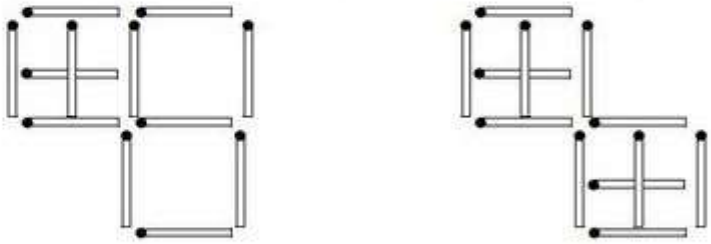
Ответы, решения, подсказки

Задача 1.

Ответ: Большой и 4 маленьких. Смотрим рисунки а–д.



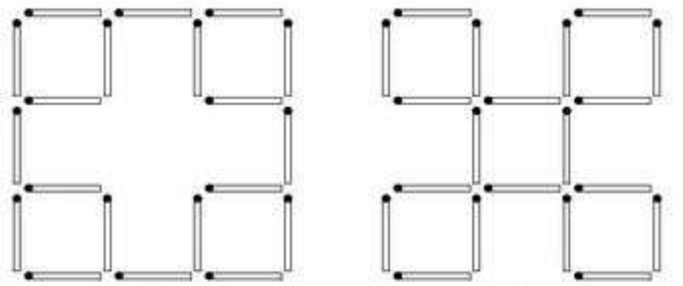
а) б) в)



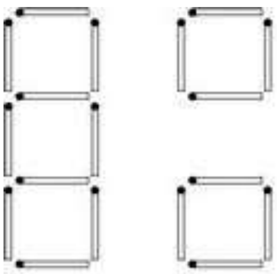
г) д)

Задача 2.

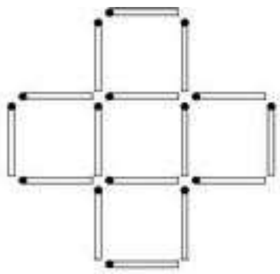
Ответ: Большой, 4 средних и 9 маленьких. Смотрим рисунки ниже а – к.



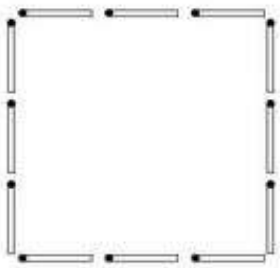
а) б)



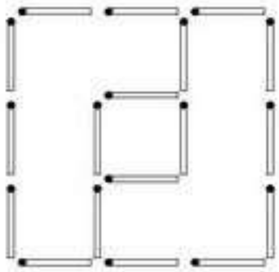
в)



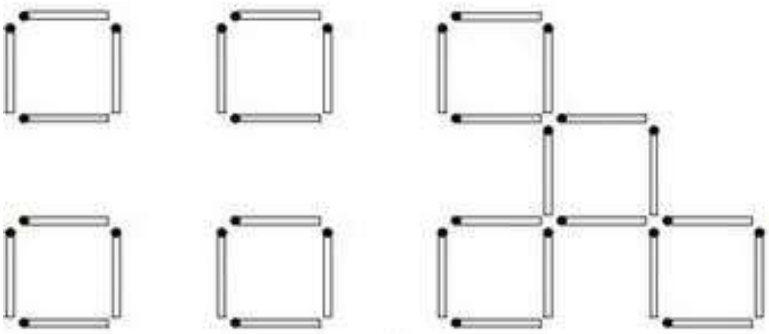
г)



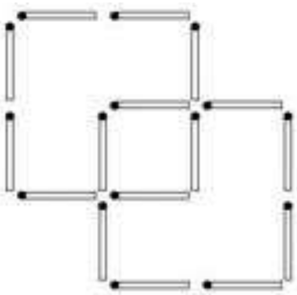
д) два таких квадрата



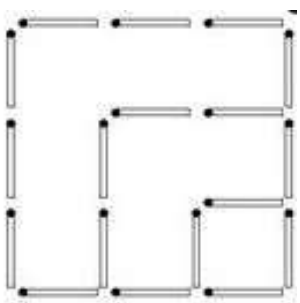
е)



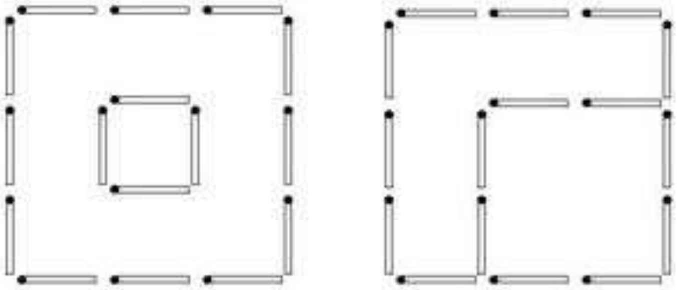
ж)



з)



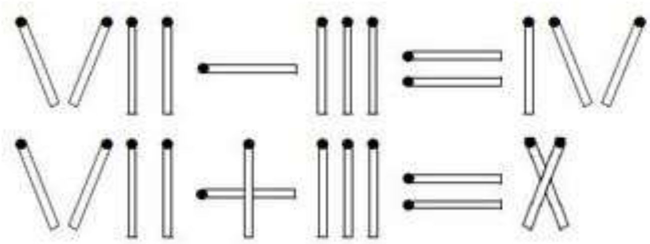
и)



к)

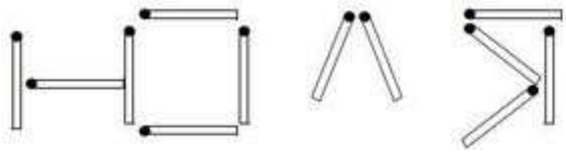
Задача 3.

Ответ :



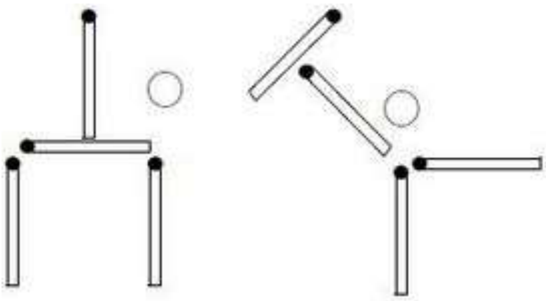
Задача 4.

Ответ:



Задача 5.

Ответ:

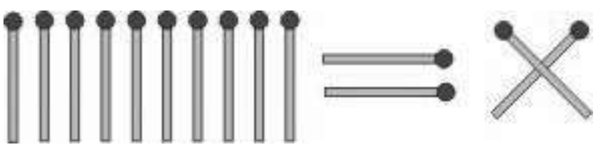


Задача 6.

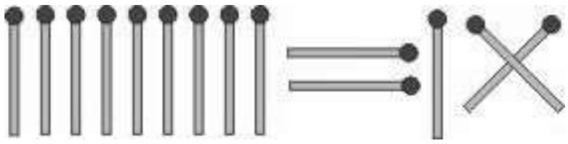
Ответ:

Надо воспользоваться тем, что в римской нумерации XI - это 11, а IX - это 9.

1-й способ:

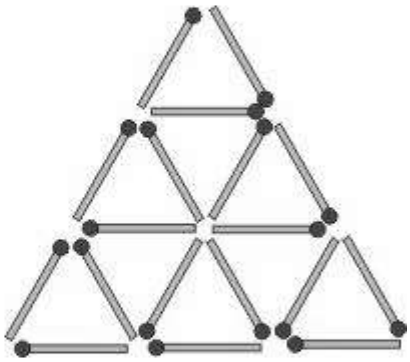


2-й способ:



Задача 7.

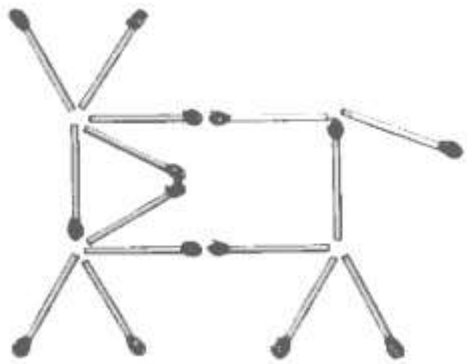
Ответ:



Задача 8.

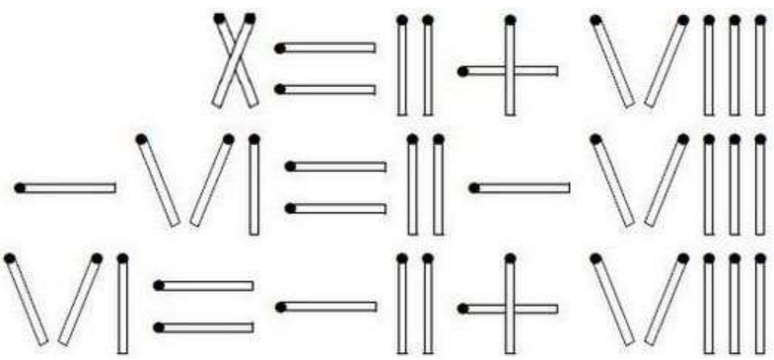
Ответ

Вот теперь корова смотрит вправо :



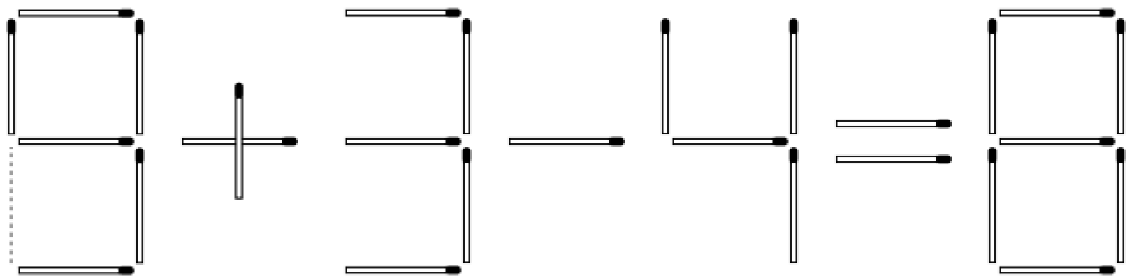
Задача 9.

Ответ:



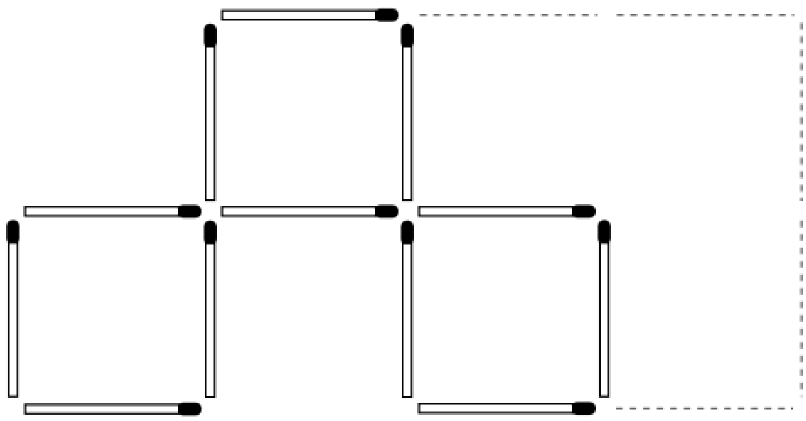
Задача 10.

Ответ:



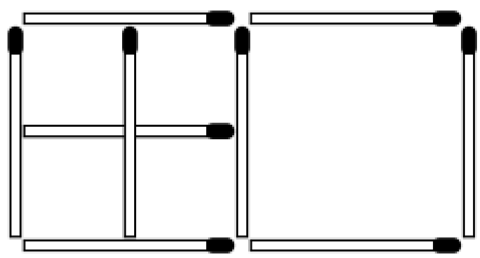
Задача 11.

Ответ:



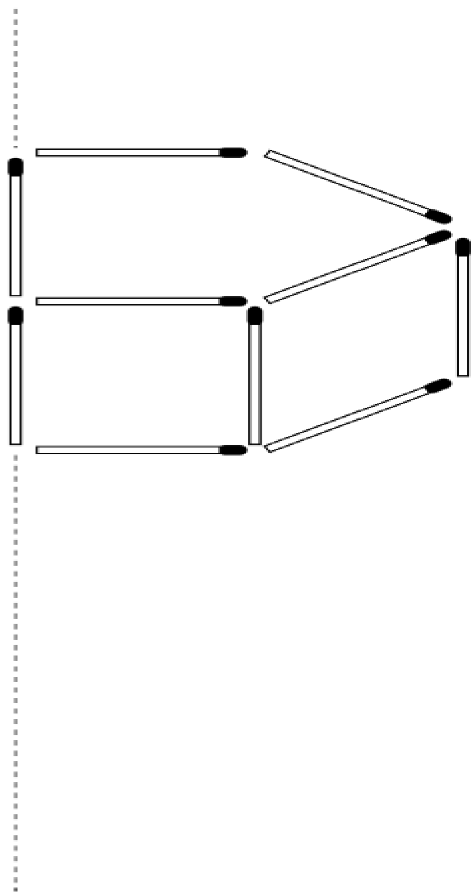
Задача 12.

Ответ:



Задача 13.

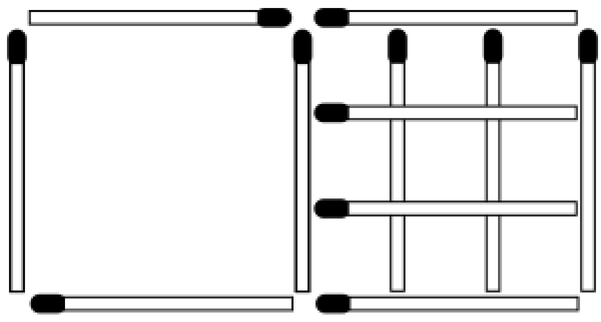
Ответ:



Ну да, стоит неровно...

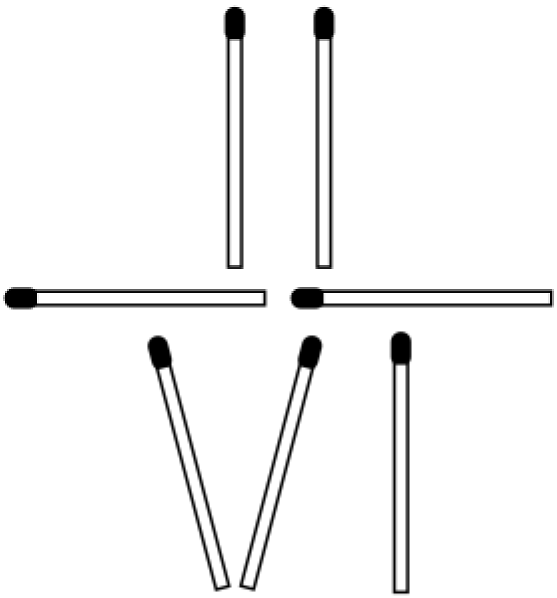
Задача 14.

Ответ:



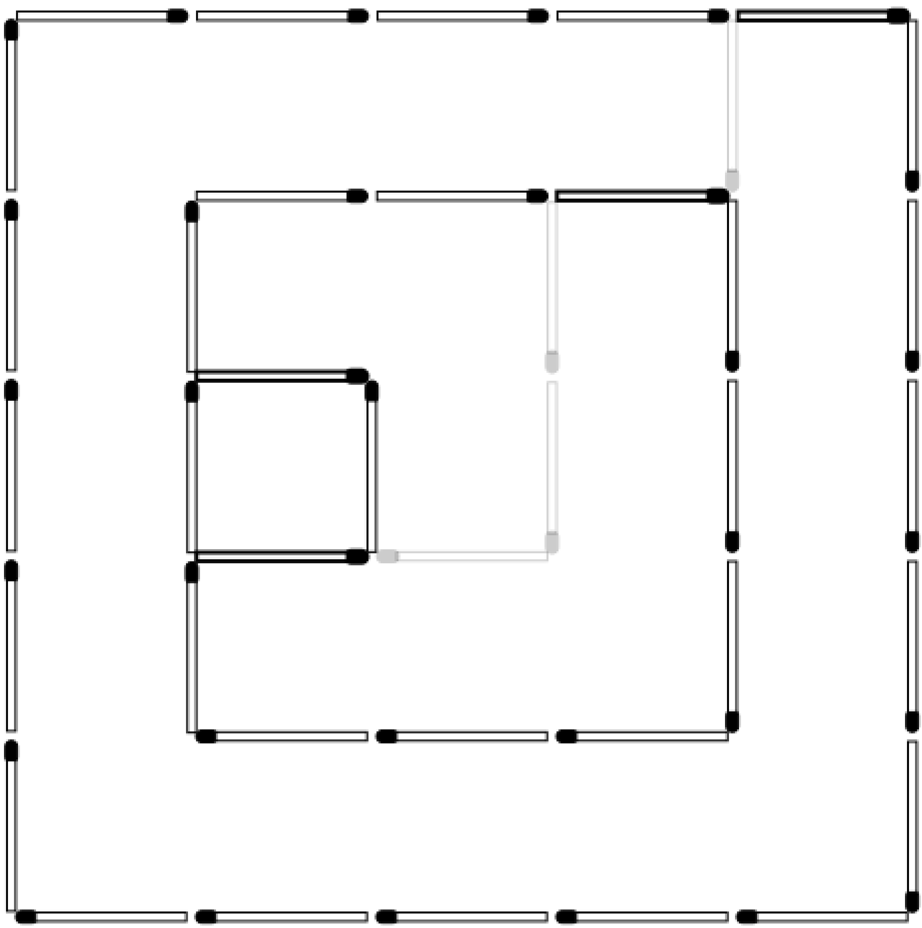
Задача15. Одна седьмая

Ответ:



Задача 16. Спираль из спичек

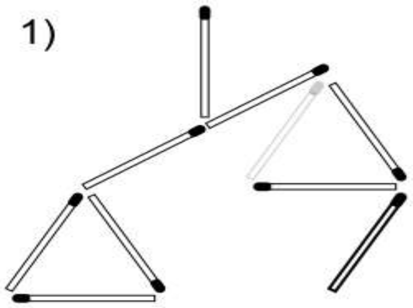
Ответ:



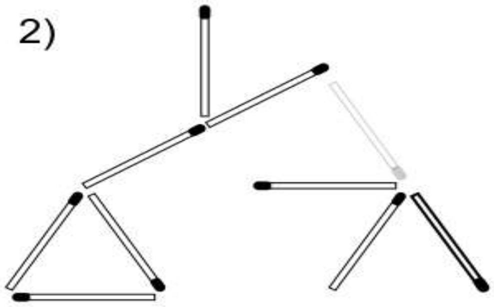
Задача 17.

Ответ:

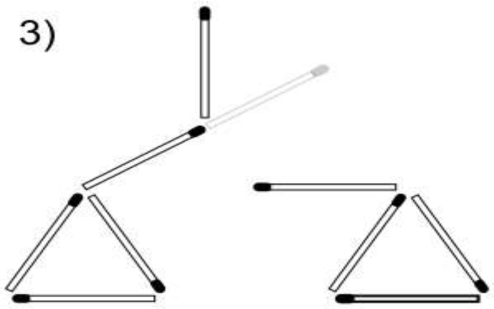
1)



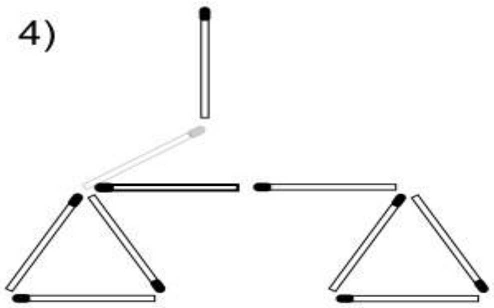
2)



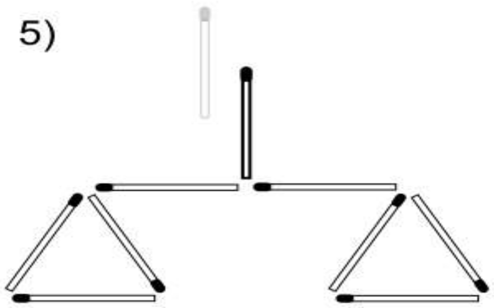
3)



4)



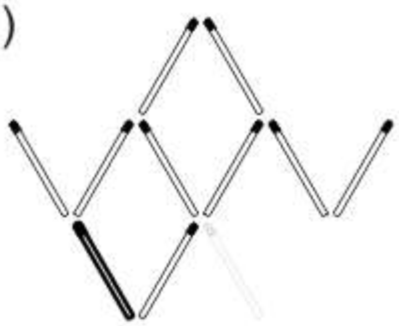
5)



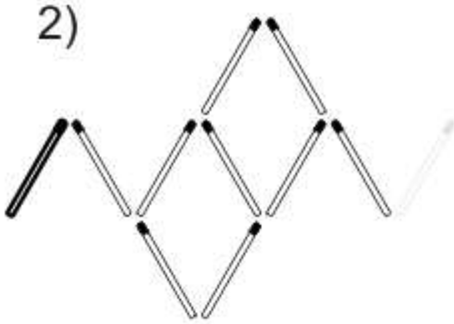
Задача 18.

Ответ:

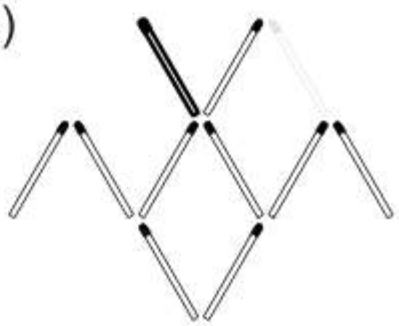
1)



2)



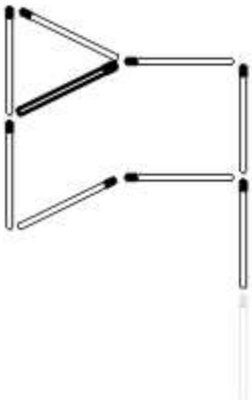
3)



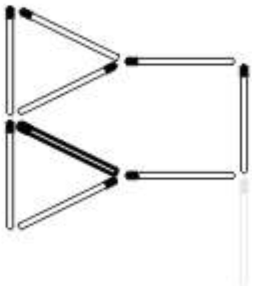
Задача 19.

Ответ:

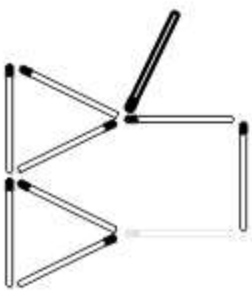
1)



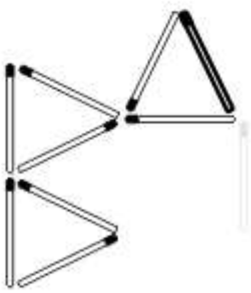
2)



3)



4)

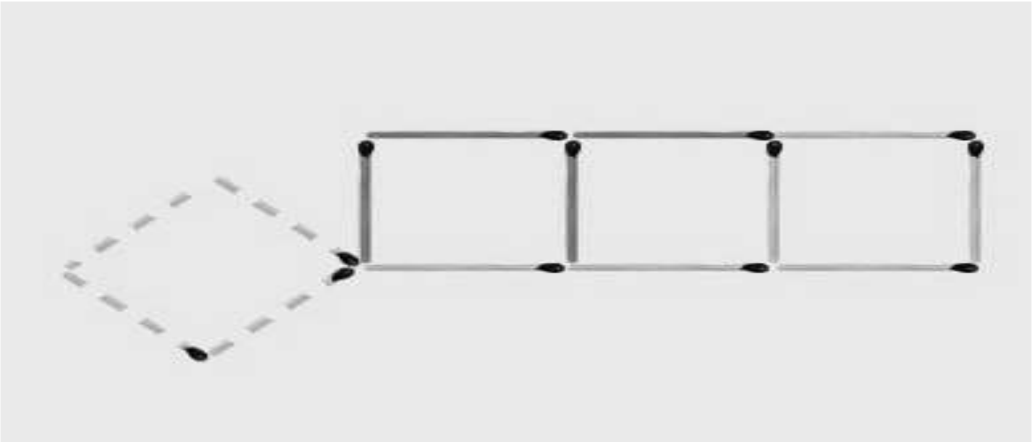


Задача 20.

Ответ:

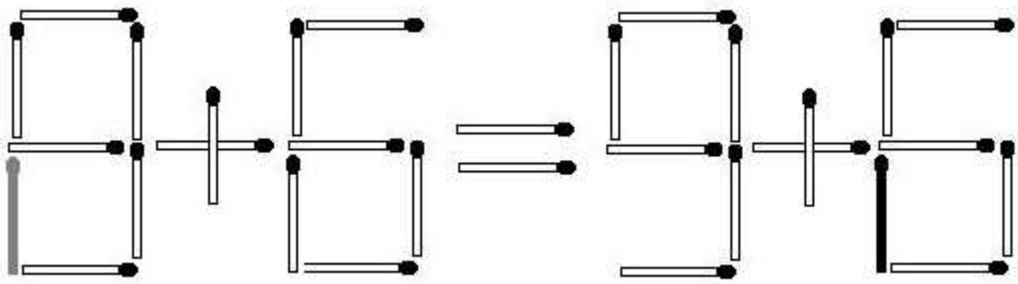
Задача 21.

Ответ:



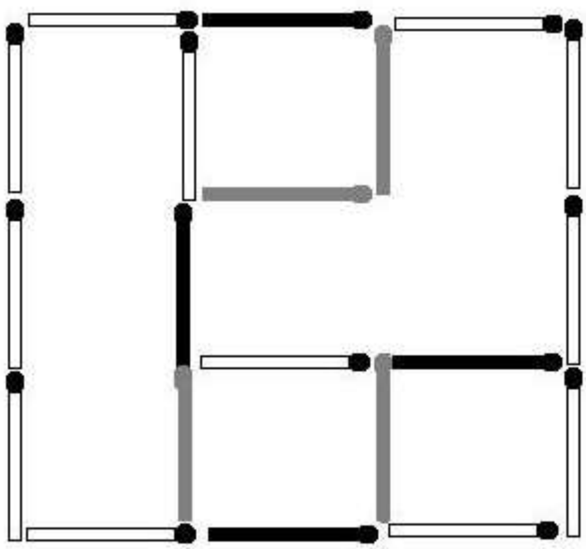
Задача 22.

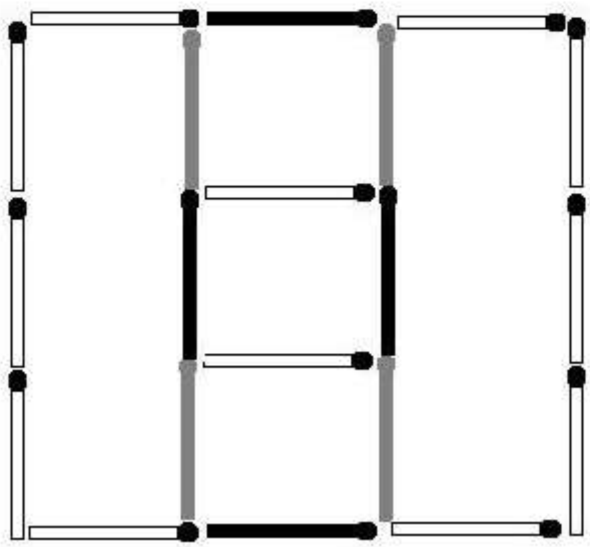
Переложим одну спичку, получим тождество 9+6=9+6 на рисунке. Затем если переложить еще 2 спички, можно получить тождества вида 3+8=3+8, 9+9=9+9 и т.д.



Задача 23.

Оба решения





Интернет - источники:

http://www.matklas.com.ua/pozaklasna-ta-vichovna-robota/zadachi-so-spichkami

http://www.smekalka.pp.ru/match.html

http://math.all-tests.ru

Глава 4. введение в комбинаторику

Глава 4. Введение в комбинаторику

"Вперёд поедешь — голову сложишь,
направо поедешь — коня потеряешь,
налево поедешь — меча лишишься"

В старинных русских сказаниях повествуется, как богатырь или другой добрый молодец, доехав до распутья, читает на камне: “Вперед поедешь – голову сложишь, направо поедешь – коня потеряешь, налево поедешь – меча лишишься”. Добрый молодец на перепутье. Он сталкивается **с проблемой выбора дальнейшего пути движения.** А дальше уже говорится, как он выходит из того положения, в которое попал в результате выбора. Но выбирать разные пути или варианты приходится и современному человеку. Это сделать очень трудно не потому, что его нет или оно одно и поэтому его трудно найти, а приходится выбирать из множества возможных вариантов, различных способов, комбинаций. И нам всегда хочется, чтобы этот выбор был оптимальный.

Оказывается, существует целый раздел математики, именуемый комбинаторикой, который занят поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из всех этих комбинаций выбрать наилучшую.

Комбинаторика – это раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

Выбором объектов и расположением их в том или ином порядке приходится заниматься чуть ли не во всех областях человеческой деятельности, например конструктору, разрабатывающему новую модель механизма, ученому-агроному, планирующему распределение с/х культур на нескольких полях, химику, изучающему строение органических молекул, имеющих данный атомный состав.

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

С комбинаторными величинами приходится иметь дело представителям многих специальностей: ученому–химику, биологу, конструктору, диспетчеру и т.п. На практике часто приходится выбирать из некоторого множества объектов подмножества элементов, обладающих теми или иными свойствами, располагать элементы одного или нескольких множеств в определенном порядке и т. д. Поскольку в таких задачах речь идет о тех или иных комбинациях объектов, их называют "комбинаторные задачи". Комбинаторная задача – задача, в которой идет речь о тех или иных комбинациях объектов.

Задачи, которые приведены в этом разделе считаются наиболее трудными, но они помогут вам творить, думать необычно, оригинально, смело, видеть то, мимо чего вы часто проходили не замечая, любить неизвестное, новое; преодолевать трудности и идти вперед.

Задача 1:

Вспомним из чего состоит флаг РФ. Из трех горизонтальных полосок разного цвета (белый, синий, красный).

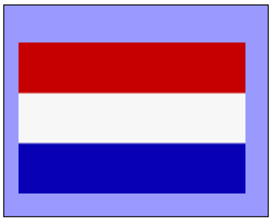
ФЛАГ РОССИИ

Оказывается, есть государства, где флаги имеют такие же цвета.

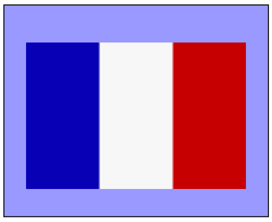
Флаги стран Европы, где встречаются три цвета:

белый, синий, красный.

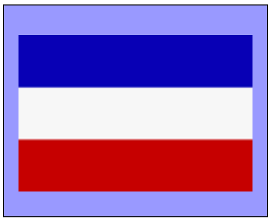
НИДЕРЛАНДЫ



ФРАНЦИЯ



ЮГОСЛАВИЯ



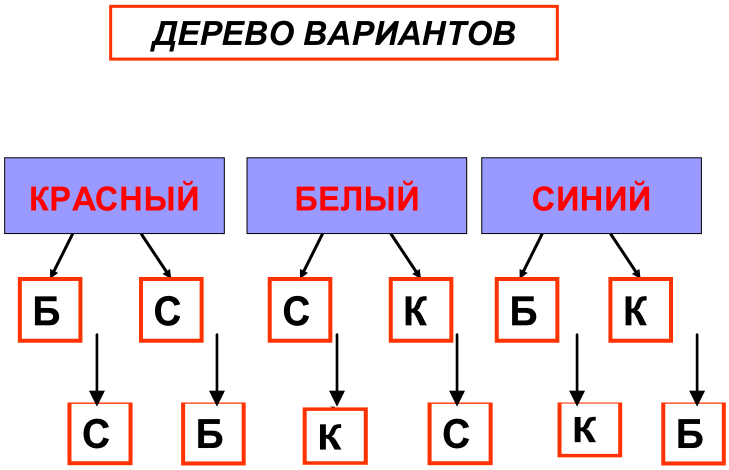
Видим, что от перестановок цветных полосок, можно получить другой флаг. Как подсчитать, сколько таких флагов мы можем составить из трех цветных полосок?

Решение этой задачи можно записать тремя способами:

Таблица вариантов

КБС	КСБ
БСК	БКС
СБК	СКБ

Дерево вариантов



Правило умножения

1 полоса **3** способа

2 полоса **2** способа (т.к. одна полоса уже зафиксирована)

3 полоса **1** способ

Количество всех вариантов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Такое произведение можно записать короче $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ (читают «три факториал»)

Ответ: $3! = 6$ способов

Мы решили задачу о флагах тремя различными способами, которые используют при решении комбинаторных задач:

- ✓ Дерево вариантов,
- ✓ табличный,
- ✓ правило умножения.

Достоинства и недостатки каждого способа приведены ниже в таблице.

Способ решения	Плюсы	Минусы
Дерево вариантов	Наглядность, возможность **увидеть** все варианты	Очень громоздкий и длительный, если много различных вариантов
Табличный	Наглядность, компактность, возможность **увидеть** все варианты	Невозможность решать задачи, в которых более двух составляющих одного события
Правило умножения	Компактность, **быстрота решения**	«Не видно» самих вариантов, можно только просчитать их количество.

В данной задаче мы переставляли полоски местами, т.е. занимались перестановкой элементов. ***Перестановками*** называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок можно найти по формуле:

$P_n = n!$,

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$.

Заметим, что удобно рассматривать 0!, полагая, по определению, $0! = 1$.

Пример перестановок:

Задача 2:

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Рассмотрим еще несколько задач с решением для лучшего усвоения материала:

Задача 3:

- Ребята, давайте вспомним басню И.А.Крылова «Квартет»:

Проказница мартышка,

Осел, Козел, Да косолапый мишка

Затеяли сыграть Квартет....

....А вы, друзья, как ни садитесь, все в музыканты не годитесь».

Сколько способами могут рассесться участники Квартета?

Решение: Квартет состоит из четырех участников. Число способов равно числу перестановок из 4 элементов. $P_4=1\cdot2\cdot3\cdot4=24$. Значит, существует 24 способа.

Задача 4: Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?

Решение задачи:

Существует 8 мест, которые должны занять 8 человек. На первое место может стать любой из 8 человек, т.е. способов занять первое место – 8. После того, как один человек стал на первое место, осталось 7 мест и 7 человек, которые могут быть на них размещены, т.е. способов занять второе место – семь. Аналогично для третьего, четвертого и т.д. места. Используя принцип умножения, получаем произведение – $8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$. Такое произведение обозначается как 8! (читается 8 факториал) и называется перестановкой $P_{8.}$

***Ответ*:** $P_8 = 8! = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1= 40320$

Еще для успешного решения задач нам необходимо познакомиться с комбинаторными ***правилами:***

Правило суммы.

Задача 5: Саша положил в корзину два белых гриба, а Таня – 3 подосиновика. Сколькими способами можно взять из корзины либо белый гриб, либо подосиновик?

В задаче рассматривается два множества: грибы Саши, обозначим его $\{a_1, a_2\}$, грибы Тани – $\{b_1, b_2, b_3\}$. Все грибы в корзине представляют собой объединение этих двух множеств: $\{a_1, a_2, b_1, b_2, b_3\}$. В полученном множестве 5 (5 = 2+3) элементов. И, значит, взять из корзины либо белый гриб, либо подосиновик можно пятью способами.

В обобщенном виде этот способ подсчета элементов в объединении пересекающихся конечных множеств называется *правилом суммы* и формируется следующим образом: *если множество A содержит* n *элементов*, а множество *B –* m *элементов и множество A и B не пересекаются, то объединение множеств A и B содержит* $n + m$ *элементов.*

В комбинаторике, которая возникла раньше теории множеств, правило суммы формулируют иначе: *если элемент* a *можно выбрать* n *способами, а элемент* b *–* m *способами, причем не один из способов выбора элемента а не совпадает со способом* b*, то выбор либо а, либо* b *можно осуществить* $n+m$ *способами.*

Задача 6:

«Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?».

При решении этой задачи сначала составляется древо всех возможных вариантов.

<table>
<tr><td>Первая цифра</td><td colspan="6">1</td><td colspan="6">3</td><td colspan="6">5</td><td colspan="6">7</td></tr>
<tr><td>Вторая цифра</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">5</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">7</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">5</td></tr>
<tr><td>Третья цифра</td><td>5</td><td>7</td><td>3</td><td>7</td><td>3</td><td>5</td><td>5</td><td>7</td><td>1</td><td>7</td><td>1</td><td>5</td><td>3</td><td>7</td><td>1</td><td>7</td><td>1</td><td>3</td><td>3</td><td>5</td><td>1</td><td>5</td><td>1</td><td>3</td></tr>
</table>

Ответ на поставленный вопрос в задаче можно получить, не выписывая сами числа и не строя дерево возможных вариантов. Рассуждать будем так. Первую цифру трехзначного числа можно выбрать четырьмя способами. Так после выбора первой цифры останутся три, то вторую цифру можно выбрать из оставшихся цифр уже тремя способами. Наконец, третью цифру можно выбрать (из оставшихся двух) двумя способами. Следовательно, общее число искомых трехзначных чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$. Формулируем еще одно правило: «Пусть имеется n элементов и требуется выбрать один за другим некоторые k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать из оставшихся n_2 способами, затем третий элемент – n_3 способами и т.д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$».

Ответ: 24

В обобщенном виде этот способ подсчета элементов в декартовом произведении конечных множеств называется *правилом произведения* и формулируется следующим образом: *если множество А содержит n, а множество В - m элементов, то декартово произведение этих множеств содержит $n \times m$ элементов.*

Применение правила умножения рассмотрено на следующем примере:

Задача 7:

«Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – три дороги, из города С до пристани – две дороги (рис. 1). Туристы хотят проехать из города А через города В и С к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?

Решение. Путь из А в В туристы могут выбрать двумя способами. Далее в каждом случае они могут проехать из В в С тремя способами. Значит, имеется $2 \cdot 3$ вариантов маршрута из А в С. Так как из города С на пристань можно попасть двумя способами, то всего существует $2 \cdot 3 \cdot 2$, т.е. 12 способов выбора туристами маршрута из города А к пристани.

Ответ: 12 способов.

Задача 8. Сколько двузначных чисел можно составить, используя цифры 7, 4, 5?

Прежде всего, выясняем, в чем отличие этой задачи от решенной ранее: в данной речь идет о таких двузначных числах, в записи которых цифры могут повторяться. В таком случае выбор цифры десятков и цифры единиц можно осуществить тремя способами каждый. Поэтому выбор двузначного числа можно выполнить согласно правилу произведения 3х3=9 способами.

Если эта задача решается методом перебора, то к шести числам 74, 75, 47, 45, 57, 54, в записи которых числа не повторяются, добавляются числа 77, 44, 55.

Задача 9. Сколько трехзначных чисел можно составить, используя цифры 7, 4, 5?

В этой задаче из цифр 7, 4 и 5 образуются трехзначные числа, а не двузначные, как в задаче 1.

Так как цифры в записи этих чисел могут повторяться, то цифру сотен, цифру десятков и цифру единиц можно выбрать тремя способами каждую. А поскольку запись трехзначного числа представляет собой упорядоченный набор из трех элементов, то согласно правилу произведения его выбор можно осуществить 27 способами, так как 3х3х3=27.

Задача 10. Сколько натуральных чисел, меньших 1000, можно записать, используя цифры 7. 4 и 5?

Натуральные числа, меньшие 1000, могут быть однозначными, двузначными и трехзначными. Поэтому подсчитываем, сколько чисел каждого вида можно записать, используя цифры 7, 4 и 5, а затем полученные результаты складываем.

Однозначных чисел будет 3, двузначных – 9 (см. задачу 8), трехзначных – 27 (см. задачу 9) . Всего натуральных чисел, меньших 1000, будет 3+9+27=39.

Получив этот результат, можно выяснить, изменится ли он, если в задаче будет оговорено, что цифры в записи числа не повторяются. С учетом этого условия однозначных чисел будет 3, двузначных -6, трехзначных – 6, а всего натуральных чисел, меньших 1000 и записанных с помощью цифр 7. 4 и 5 без их повторения, будет 3+6+6=15.

Кроме того, можно узнать, сколько четных натуральных чисел, меньших 1000, можно записать используя цифры 7, 4 и 5.

С помощью данных цифр можно записать такие четные числа: одно однозначное число (это 4), три двузначные (так как имеется 3 способа выбора цифры десятков и один способ выбора цифры единиц) и девять трехзначных (так как имеется 3 способа выбора цифры сотен, 3 – цифры десятков и 1 – цифры единиц).

Всего четных натуральных чисел. Меньших 1000, записанных с помощью цифр 7, 4 и 5, будет 13 (1+3+9=13).

Задача 11. Сколько всего четырехзначных чисел можно составить из цифр 0 и1?

Запись четырехзначного числа представляет собой упорядоченный набор (кортеж) из четырех цифр. Первую цифру – цифру тысяч – можно выбрать только одним способом, так как запись числа не может начинаться с нуля. Цифрой сотен может быть либо 0, либо 1, т.е. имеется два способа выбора. Сколько же способов выбора имеется для цифры десятков и цифры единиц. Тогда согласно правилу произведения с помощью цифр 0 и 1 можно записать 8 четырехзначных чисел, так как 1 х 2 х 2 х 2=8.

Можно проиллюстрировать полученный результат. Записав все эти числа, т.е. решив данную задачу методом перебора. Запишем сначала числа, в записи которых используются только цифра 1. Такое число только одно – 1111.

Затем записываем все числа, в записи которых используются три единицы и один нуль: 1110, 1101, 1011.

Далее записываем все числа, в записи которых используются две единицы и два нуля: 1100, 1010, 1001.

И, наконец, получаем число, в записи которого одна единица и три нуля 1000.

Задача 12. Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 3, 6, 7 и 9, если каждая из них может быть использованы в записи только один раз?

Так как запись числа не может начинаться с нуля, то цифру сотен можно выбрать пятью способами; выбор цифры десятков также можно осуществить пятью способами, поскольку цифры в записи числа не должны повторяться, а одна из шести данных цифр будет уже использована для записи сотен; после выбора двух цифр (для записи сотен и десятков) выбрать цифру единиц из данных шести можно четырьмя способами. Отсюда по правилу произведения получаем, что трехзначных чисел (из данных шести цифр) можно образовать 5х5х4=100 способами.

Заметим, что не только задачу 4, но и первые три можно решать в начальной школе методом перебора, причем в задаче 2 можно уменьшить число возможных случаев, если добавить условие, что цифры в записи числа не повторяются. При этом умение применять правило произведения для подсчета числа всевозможных комбинаторных соединений позволяет учителю контролировать правильность решения этих задач.

С помощью правила произведения легко проверяются решения комбинаторных задач, предлагаемых младшим школьникам и выполненных методом перебора. Приведем несколько примеров из статьи Р. Хазанкина «Словарь племени сю – сю», опубликованной в «Учительской газете» 21 января 1992г.

Задача 13. У марсиан 2 буквы в алфавите: А, Б. Сколько можно составить слов длины «три» из такого алфавита?

Ответ: 2 х 2 х 2=8 (слов).

Задача 14. У жителей луны в алфавите три буквы: М, Я, У. Сколько различных слов длины «три» можно составить из этих букв?

Ответ: 3х3х3=27 (слов).

Задача 15. У племени «сю – сю» в алфавите 4 буквы: М, Я, А, У. А все слова только трехбуквенные. Сколько существует различных слов у этого племени?

Ответ: 4х4х4=64 (слова).

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 16.

Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов он может выбрать?

Задача 17.

Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?

Задача 18.

Сколько трехзначных чисел можно записать, используя цифры 0, 1, 3, 6, 7 и 9, если каждая из них может быть использована в записи только один раз?

Задача 19.

Имеется 6 видов конвертов без марок и 3 вида марок. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку для посылки письма?

Задача 20.

Сколькими способами можно разместить на странице 5 различных заметок?

Задача 21.

Переплетчик должен переплести 12 различных книг в красный, зеленый и коричневые переплеты. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 22.

Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

Задача 23.

Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека – Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?

Задача 23.

Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов занять эти два места на стадионе?

Задача 24

В турнире Архимеда участвуют команды из восьми человек. Сколькими способами можно в команде выбрать капитана и его заместителя?

Задача 25.

В математической карусели участвовали 12 команд. Сколькими способами можно распределить места между командами, если несколько команд не могут разделить одно место между собой?

Задача 26.

В школьной столовой 5 кранов для умывания. Каждый может быть закрыт или открыт. Сколькими способами может течь вода в столовой?

Задача 27.

Словом назовём произвольную последовательность букв. Сколько возможных слов можно составить, переставляя буквы в слове УЧЕНИК;

Задача 28.

Сколько разных ожерелий можно сделать из

а) 11 бусинок разных цветов;

б) 3 красных и 8 синих бусинок;

в) 3 красных и 8 синих бусинок, но красные нельзя ставить рядом?

Задача 29.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и чёрную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

Задача 30.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и чёрного короля, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

Задача 31.

Начальник транспортного цеха пригласил несколько человек на совещание. Каждый участник совещания, входя в кабинет, пожимал руки всем присутствующим. Сколько человек участвовали в совещании, если было всего 78 рукопожатий?

Задача 32.

Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра?

Задача 33.

Сколько семизначных чисел не содержат цифры 2?

Указание. Первую цифру можно выбрать 8 способами (потому что эта цифра — не 0 и не 2). Каждую следующую цифру можно выбрать 9 способами.

Задача 34. ***Чайная комбинаторика.***

В магазине "Все для чая" есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Задача 35 ***Разноцветные елки.***

а) Сколькими способами можно покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски неограниченно, а каждую елку красим только в один цвет?

б) Есть пять шариков: красный, зеленый, желтый, синий и золотой. Сколькими способами можно украсить ими пять елок, если на каждую требуется надеть ровно один шарик?
в) А если можно надевать несколько шариков на одну елку (и все шарики должны быть использованы)?

Задача 36. ***Подбираем перчатки.***

Глория больше всего любит желтый и розовый цвета. В ящике для перчаток у Глории лежат шесть пар желтых и шесть пар розовых. Они перемешаны в беспорядке. Сколько перчаток Глория должна вытащить из ящика, чтобы среди них наверняка оказалась пара одного цвета? Глории все равно, какого цвета окажется эта пара - желтого или розового.

Задача 37. ***Выбираем варенье.***

У вас в тёмном чулане стоят банки с вареньем трёх сортов: яблочное, сливовое и земляничное. Какое наименьшее количество банок вам надо взять, не глядя, чтобы среди них наверняка оказалось не менее девяти банок с вареньем одного сорта?

Задача 38. ***Завтрак людоеда.***

У людоеда в подвале томятся 25 пленников.

а) Сколькими способами он может выбрать трех из них себе на завтрак, обед и ужин?

б) А сколько есть способов выбрать троих, чтобы отпустить на свободу?

Задача 39. ***Замки и ключи.***

Перед нами 10 закрытых замков и 10 похожих ключей к ним. К каждому замку подходит только один ключ, но ключи смешались. Возьмем один из замков, назовем его первым и попробуем открыть его каждым из 10 ключей. В лучшем случае он откроется первым же ключом, а в худшем - только десятым.
Сколько нужно в худшем случае произвести проб, чтобы открыть все замки?

Задача 40 ***Сколько переводчиков?***

На международную конференцию приехали 10 делегатов, не понимающих языка друг друга. Какое минимальное число переводчиков потребуется для обслуживания конференции при условии, что каждый переводчик знает только два языка?

Задача 41. ***Цветные шары.***

В ящике лежат 70 шаров: 20 красных, 20 синих, 20 желтых, остальные черные и белые. Какое наименьшее число шаров надо взять, не видя их, чтобы среди них было не меньше 10 шаров одного цвета?

Задача 42. ***Две шашки.***

На пустую шашечную доску надо поместить две шашки разного цвета. Сколько различных положений могут они занимать на доске?

Задача 43. ***С днём рождения!***

Маша на свой день рождения пригласила в гости трех лучших подруг - Дашу, Глашу и Наташу. Когда все собрались, то по случаю дня рождения Маши решили обняться - каждая пара по одному разу. Сколько получилось разных пар?

Задача 44:

В Стране Чудес есть три города: А, Б и В. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

Задача 45:

В Стране Чудес есть четыре города: А, Б и В и Г. Из города А в город Б ведет 6 дорог, а из города Б в город В – 4 дороги, Из города А в город Г – две дороги, и из города Г в город В – тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от А до В?

Задача 46:

Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Задача 47:

Каждую клетку квадратной таблицы 2 ? 2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

Задача 48:

Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

Задача 49:

В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

Задача 50:

Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

Задача 51:

На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

Ответы, указания, решения:

Задача 16.

Решение:

Число маршрутов равно числу перестановок из 7 элементов.

$P_7=7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040$

Ответ: 5040 маршрутов.

Задача 17.

Решение:

Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки, которые начинаются с 0, т.к. натуральное число не может начинаться с цифры 0. число таких перестановок равно P_3. значит, искомое число четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 2, 4, 6 равно $P_4 – P_3= 4!–3!=1\cdot2\cdot3\cdot4 – 1\cdot2\cdot3= 24 – 6=18$.

Ответ: 18 чисел.

Задача 18.

Решение:

Так как запись числа не может начинаться с нуля, то цифру сотен можно выбрать пятью способами; выбор можно также осуществить пятью способами, поскольку цифры в записи числа не должны повторяться, а одна из шести цифр будет уже использована для записи сотен; после выбора двух цифр (для записи сотен и десятков) выбрать цифру единиц из данных шести можно четырьмя способами. Отсюда, по правилу произведения, получаем, что трехзначных чисел можно образовать $5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ способами.

Ответ. 100 способов

Задача 19.

Решение:

Конверт можно выбрать шестью способами, марку - тремя, с каждым из шести способов выбора конверта может совпасть любой из трех способов выбора марки. Тогда, согласно правилу умножения, имеем $6 \cdot 3 = 18$ способов.

Ответ. 18.

Задача 20.

Решение:

т.к. имеются 5 заметок, и все они участвуют в выборе, то это перестановки. Применим формулу перестановок: $P_n=n!$, получаем, $P_5= 5! = 120$.

Ответ: Существуют 120 способов разместить имеющиеся заметки.

Задача 21.

Решение:

Имеется 12 книг и 3 цвета, значит по правилу произведения возможно $12 \cdot 3 = 36$ вариантов переплета.

Ответ: 36 способов.

Задача 22.

Решение:

В таких числах последняя цифра будет такая же, как и первая, а предпоследняя - как и вторая. Третья цифра будет любой. Это можно представить в виде $\underline{XYZYX}$, где Y и Z -любые цифры, а X - не ноль. Значит по правилу произведения количество цифр одинаково читающихся как слева направо, так и справа налево равно $9 \cdot 104 \cdot 10 = 900$ вариантов.

Ответ: 900 пятизначных чисел

Задача 23.

Решение:

Составим сначала все пары, в которые входит Антонов (для краткости будем писать первые буквы фамилий). Получим три пары: АГ, АС, АФ.

Выпишем теперь пары, в которые входит Григорьев, но не входит Антонов. Таких пар две: ГС, ГФ.

Далее составим пары, в которые входит Сергеев, но не входит Антонов и Григорьев. Такая пара только одна: СФ.

Других вариантов составления пар нет, так как все пары, в которые входит Федоров, уже составлены.

Итак, мы получили 6 пар: АГ, АС, АФ, ГС, ГФ, СФ. Значит, всего существует 6 вариантов выбора тренером пары теннисистов из данной группы.

Ответ: 6 вариантов выбора.

Задача 23.

Решение:

Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч на 1-е и 2-е места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов занять эти два места на стадионе?

Если на матч пойдут Антон и Борис, то они могут занять места двумя способами: 1-е место – Антон, 2-е – Борис, или наоборот. Аналогично Антон и Виктор, Борис и Виктор. Таким образом, мы получили 6 вариантов: АБ, БА, АВ, ВА, БВ, ВБ.

Ответ: 6 вариантов выбора.

Задача 24

Решение.

Капитаном может быть любой из восьми человек, т.е. существует 8 способов выбрать капитана. Любой из оставшихся может стать заместителем капитана. Таким образом, для любого варианта выбора капитана (из 8 возможных) существует 7 способов выбрать его заместителя. Тогда всего $8 \times 7 = 56$ способов.

Ответ. 56 способами.

Задача 25.

Решение.

Первое место может занять любая из 12 команд. Второе место — любая из 11 оставшихся команд, третье — любая из 10 оставшихся, …, одиннадцатое — любая из двух ещё не выбранных команд и двенадцатое — последняя оставшаяся команда. Итого, $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 12!$ способов.

Ответ. 12!

Задача 26.

Решение.

Пронумеруем краны числами от одного до пяти. Первый кран может быть либо закрыт, либо открыт — два способа. В каждой из этих ситуаций второй кран может быть либо открыт, либо закрыт — итого имеем $2 \cdot 2=4$ способа. В каждой из этих четырёх ситуаций третий кран может быть либо закрыт, либо открыт, итого имеем $4 \cdot 2=8$ способов. И так далее. Получаем, что вода в столовой может течь $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$ способами.

Ответ. 32 способами.

Задача 27.

Решение.
Всего шесть букв. Все они попарно различны. Поэтому, составляя слово из данных букв, первой мы можем поставить любую из них, второй — любую из пяти оставшихся, …, шестой — последнюю оставшуюся. Т.о. всего $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=6!$ способов.

Ответ. 6! слов

Задача 28.

а) Переформулируем условие задачи. Будем считать, что у нас есть ожерелье с одиннадцатью белыми бусинками. Нам нужно покрасить каждую бусинку в один из 11 цветов, при этом каждый цвет мы должны использовать ровно один раз.

Тогда первую бусинку мы можем покрасить в один из 11 цветов, вторую — в любой из 10 — оставшихся, …, десятую — в любой из двух оставшихся, одиннадцатую — в последний оставшийся. Т. о. всего 11! вариантов получить ожерелье. Но при этом мы не учитываем, что все варианты разбиваются на группы по 11 штук, получающихся друг из друга поворотом (а это одинаковые ожерелья). Кроме того, все ожерелья можно разбить на пары совмещающихся переворотом, причём любые два таких варианта поворотом не совмещаются, т.е. находятся в разных группах по 11 штук. Т. о. количество способов получить ожерелье равно $11!/(11\cdot 2)$.

Ответ. а) $^{11!}/_{22}$ ожерелий; б) 10 ожерелий; в) 5 ожерелий.

Задача 29.

Решение.

Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Независимо от своего расположения она бьёт 15 полей (включая поле, на котором она стоит). Поэтому остаётся 49 полей, на которые можно поставить чёрную ладью. Таким образом, всего есть $64 \cdot 49 = 3136$ разных способов

Ответ. 3136 разных способов

Задача 30.

Решение.

Белого короля можно поставить на любое из 64 полей. Однако количество полей, которые он при этом будет бить, зависит от его расположения. Поэтому разберём три случая:

если белый король стоит в углу (углов всего 4), то он бьёт 4 поля (включая то, на котором стоит) и остаётся 60 полей, на которые можно поставить чёрного короля;

если белый король стоит на краю доски, но не в углу (таких полей 24), то он бьёт 6 полей, и для чёрного короля остаётся 58 возможных полей;

если же белый король стоит не на краю доски (таких полей 36), то он бьёт 9 полей, и для чёрного короля остаётся 55 возможных полей.

Таким образом, всего есть

$$4 \cdot 60 + 24 \cdot 58 + 36 \cdot 55 = 3612$$

способов расстановки королей.

Ответ. 3612.

Задача 31.

Ответ. 13.

Задача 32.

Указание.

Вместо того, чтобы подсчитывать количество требуемых шестизначных чисел, определите количество шестизначных чисел, у которых все цифры нечётны.

Решение. Количество шестизначных чисел, в записи которых встречаются только нечётные цифры, равно 5^6 = 15 625. Всего шестизначных чисел 900 000. Поэтому количество шестизначных чисел, в записи которых есть хотя бы одна чётная цифра, равно

900 000 – 15625 = 884 375.

Ответ. 884375.

Задача 33.

Ответ. 8 · 9 · 9 · 9 · 9 · 9 · 9 = 4 251 528.

Задача 34.

Ответ:

Выберем чашку. В комплект к ней можно выбрать любое из трех блюдец. Поэтому есть 3 разных комплекта, содержащих выбранную чашку. Поскольку чашек всего 5, то число различных комплектов равно 15 (15=5·3).

Задача 35

Ответ:

а) Каждую из пяти елок можно покрасить в один из трех цветов, поэтому всего различных способов существует 3*3*3*3*3 = 35 = 243.
б) На первую елку можно надеть любой из пяти шариков, на вторую елку — любой из оставшихся четырех, и так далее; всего получаем 5*4*3*2*1 = 120 способов.
в) Каждый из шариков можно надеть на любую елку, поэтому в этом случае ответ – 5^5 = 3125

Задача 36.

Ответ:

Может получится так, что Глория вытащит все 12 перчаток на левую руку. Но уже следующей перчатке обязательно найдется пара. Значит, для полной уверенности
нужно вытащить 13 перчаток.

Задача 37.

Ответ:

25 банок. При этом распределение по сортам будет (к примеру) таким: 8 банок - с яблочным вареньем, 8 - со сливовым и 9 - с земляничным (8+8+9=25). Двадцати четырех банок для выполнения условия уже не хватает: каждого сорта может быть только по 8 банок.

Задача 38.

Ответ:

а) На завтрак людоед может предпочесть любого из 25 человек, на обед — любого из 24 оставшихся, а на ужин — кого-то из 23 оставшихся счастливчиков. Всего получаем $25 \cdot 24 \cdot 23 = 13800$ способов.

б) Заметим, что в предыдущем пункте каждую тройку пленников мы посчитали $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ раз. Поскольку теперь их порядок нам неважен, то ответом будет число $13800 : 6 = 2300$.

Задача 39.

Ответ:

Для 1-го замка достаточно 9 проб (10-я не обязательна), для 2-го - 8, для 3-го - 7 и т.д., а для оставшегося 10-го не требуется ни одной.

Общее число проб составит $9+8+7+...+1+0 = 45$.

Задача 40

Ответ: 9.

Задача 41.

Ответ: 38.

Задача 42.

Ответ:

Первую шашку можно поместить на любое из 64 полей доски, т.е. 64 способами. После того как первая поставлена, вторую шашку можно поместить на какое-либо из прочих 63 полей. Значит к каждому из 64 положений первой шашки можно присоединить 63 положения второй шашки. Отсюда общее число различных положений двух шашек на доске: $64 \cdot 63 = 4032$.

Задача 43.

Ответ: Шесть.

Задача 44:

Решение:

Ответ: 24 = 6 • 4.

Задача 45:

Решение:

Выделим два случая: путь проходит через город Б или через город Г. В каждом из этих случаев легко сосчитать количество возможных маршрутов: в первом – 24, во втором – 6. Складывая, получаем общее количество маршрутов: 30.

Задача 46:

Ответ: 6.

Задача 47:

Ответ: 24.

Задача 48:

Решение:

Цвет для верхней полоски флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полоски флага остается пять возможных цветов, а затем для нижней полоски флага – четыре различных цвета. Таким образом, флаг можно сделать 6 • 5 • 4 = 120 способами.

Задача 49:

Решение:

Каждая авиалиния соединяет два города. В качестве первого города можно взять любой из 20 городов (город А), а в качестве второго – любой из 19 оставшихся (город В). Перемножив эти числа, получаем 20 • 19 = 380. Однако при этом подсчете каждая авиалиния учтена дважды (первый раз, когда в качестве первого города был выбран город А, а второго – город В, а второй раз – наоборот). Таким образом, число авиалиний равно 380:2 = 190.

Задача 50:

Решение:

13 • 12 • 11 • 10

Задача 51:

Решение:

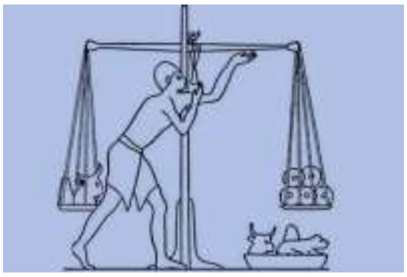
5 + 5 • 4 + 5 • 4 • 3 + 5 • 4 • 3 • 2 + 5 • 4 • 3 • 2 • 1 = 325

Литература и интернет - источники

1. Еженедельное учебно-методическое приложение “Математика” Изд. Пресса. Москва.1999 г
2. Л.Г. Петерсон. Математика 4 класс. Изд. Баласс. Москва.1999 г.
3. wiki.vladimir.i-edu.ru›images…4c
4. http://mmmf.msu.ru/archive/19992000/spivak67/s_combz.html

Глава 5.

взвешивания, переливания, разрезания



Глава 5.

взвешивания, переливания, разрезания

В этом разделе объединены задачи нескольких типов. Задачи, связанные с взвешиванием монет, гирь и других предметов. Задачи на манипулирование предметами - переливания. Задачи на деление, разделение какого-либо предмета на части. В принципе, для решения многих этих задач не требуется обладания какими-либо специальными познаниями, достаточно только смекалки. Но некоторые задачи требуют знания специальных приемов и методов, которые будут также описаны.

- задачи и головоломки на деление, разделение целого предмета на части:

Задачами на разрезание увлекались многие ученые с древнейших времен. Решения многих простых задач на разрезание были найдены еще древними греками, китайцами, но первый систематический трактат на эту тему принадлежит перу Абуль-Вефа. Геометры всерьез занялись решением задач на разрезание фигур на наименьшее число частей и последующее построение другой фигуры в начале 20 века. Одним из основателей этого раздела был знаменитый основатель головоломок Генри Э.Дьюдени В наши дни любители головоломок увлекаются решением задач на разрезание прежде потому, что универсального метода решения таких задач не существует, и каждый, кто берется их решать, может в полной мере проявить свою смекалку, интуицию и способность к творческому мышлению.

Основное условие - разделить какой-либо предмет на части таким способом, чтобы число делений было минимально. Решением является количество и размер частей. При решении задач вида «Разрезания на клетчатом листе бумаги» полезно применять следующие соображения:

Площадь. Если требуется разбить фигуру на несколько равных частей, стоит сначала найти площадь разрезаемой фигуры, а потом — каждой из частей. Сходным образом, если исходную фигуру нужно разбить на несколько фигур заданного вида, стоит предварительно посчитать, сколько их должно быть. Такие же соображения могут помочь и при решении других задач на разрезание. Для иллюстрации этой идеи автор этих строк добавил в список задачу 13, которой не было среди задач, предлагавшихся на занятии.

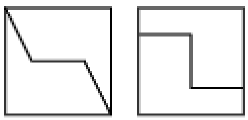
Симметрия. Свойствам симметрии следует уделять внимание, например, в случае, когда требуется разрезать одну фигуру на части и из них собрать другую фигуру.

Задача:

Легко можно разрезать квадрат на два равных треугольника или два равных четырехугольника. А как разрезать квадрат на два равных пятиугольника или два равных шестиугольника?

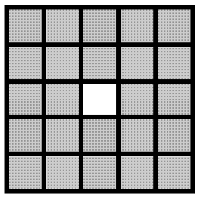
Ответ

См. рисунок.

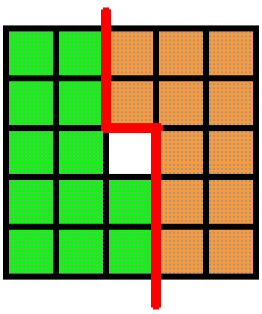
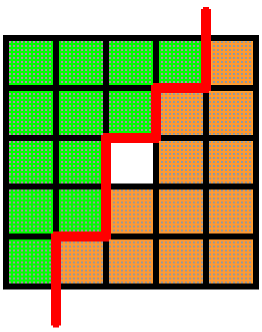


Задача:

Разрежьте квадрат 5×5 с дыркой (см. рисунок) на две равные части двумя способами. Способы разрезания квадрата на две части будем считать различными, если части квадрата, полученные при одном способе разрезания, отличаются по форме или размеру от частей, полученных при другом способе (то есть их нельзя совместить наложением).

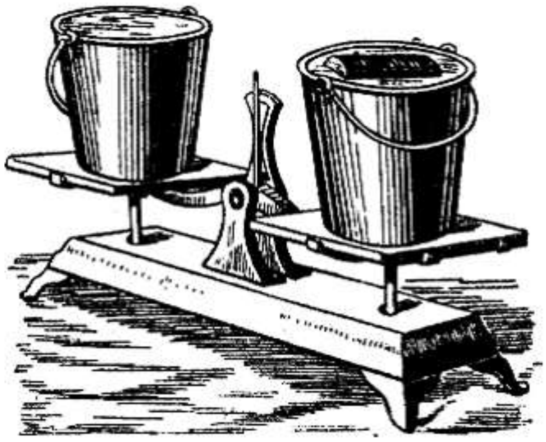


Ответ

- задачи и головоломки на переливания (пересыпания):

Условия и правила типичной задачи на переливания: все сосуды без делений; если в переливании участвовали два сосуда, то из первого сосуда можно перелить во второй или всю жидкость, находящуюся в первом сосуде (в случае, если пустой объем второго сосуда больше количества жидкости, находящейся в первом), или то количество жидкости, которое полностью заполнит второй сосуд (если пустой объем второго сосуда меньше количества жидкости в первом); переливать жидкости на "глаз" нельзя; отмерить ровно половину жидкости можно только в сосудах правильной цилиндрической формы (в задаче должно быть указано это условие).



Решением задачи будет таблица с изменением количества жидкости в сосудах после каждого переливания. Наилучшее решение - наименьшее количество таких переливаний (строк в таблице).

При решении задач этой темы необходимо учитывать следующее замечание: при переливании разрешается наливать в сосуд ровно столько жидкости, сколько в нем помещается, либо выливать всю жидкость из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается.

Задача.

Имеется 2 сосуда емкостями 8 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 7 л воды?

Решение

Ход	1	2	3	4	5	6	7
8л	0	5	5	8	0	2	7
5л	5	0	5	2	2	5	0

Теперь поясним подробнее, как можно получить эту таблицу.

1-й ход. Наполняем 5-литровый сосуд водой. Цифра О в строке 8 л при первом ходе означает, что 8-литровый сосуд пока пуст.

2-й ход. Из 5-литрового сосуда переливаем всю воду в 8-литровый, т. е. 5-литровый сосуд пуст.

3-й ход. 8-литровый сосуд не трогаем, а 5-литровый — наполняем.

4-й ход. Из полного 5-литрового сосуда отливаем 3 л в 8-литровый, т. е. полностью его наполняем. При этом в 5-литровом сосуде остается 2 л.

5-й ход. Из 8-литрового сосуда выливаем (например, в раковину) всю воду, т. е. он теперь пуст. А 5-литровый сосуд не трогаем.

6-й ход. Из 5-литрового сосуда наливаем имеющиеся там 2 л в 8-литровый и одновременно наполняем 5-литро¬вый сосуд.

7-й ход. Из 5-литрового сосуда переливаем всю воду в 8-литровый сосуд, в котором теперь требуемые 7 л (2 + + 5 = 7).

Задачи для самостоятельного решения:

Задача 1. *Где фальшивые монеты?*

На столе лежит десять пронумерованных шляп. В каждой шляпе лежит по десять золотых монет. В одной из шляп находятся фальшивые монеты. Настоящая весит 10 граммов, а поддельная только 9. В помощь даны весы со шкалой в граммах. Как определить в какой из шляп находятся фальшивые монеты, используя весы только для одного взвешивания? Весы могут взвешивать не более 750 грамм.

Задача 2. *13 монет.*

Имеется 13 монет, из них ровно одна фальшивая, причем неизвестно, легче она настоящих или тяжелее. Требуется найти эту монету за три взвешивания. Весы - стандартные для задач этого типа: две чашечки без гирь.

***Задача 3**. Узнать вес хотя бы одной.*

У барона Мюнхгаузена есть 8 внешне одинаковых гирек весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 8 г. Он помнит, какая из гирек, сколько весит, но граф Склероз ему не верит. Сможет ли барон провести одно взвешивание на чашечных весах, в результате которого будет однозначно установлен вес хотя бы одной из гирь?

***Задача 4.** Бракованные таблетки.*

В аптеку поступило сильнодействующее лекарство - 8 упаковок по 150 таблеток. Следом пришло сообщение, что в этой партии есть несколько упаковок с бракованными таблетками - их вес на 1 мг больше нормальной дозы. Как за одно взвешивание выявить все упаковки с бракованными таблетками? Упаковки можно вскрывать.

***Задача 5**. Легче или тяжелее?*

Среди 101 одинаковых по виду монет одна фальшивая, отличающаяся по весу. Как с помощью чашечных весов без гирь за два взвешивания определить, легче или тяжелее фальшивая монета? Находить фальшивую монету не требуется.

***Задача 6**. Развесить чай.*

Как развесить 20 фунтов чая в 10 коробок по 2 фунта в каждой за девять развесов, имея только гири на 5 и на 9 фунтов? Используются обычные весы с двумя чашами - как у статуи Правосудия

***Задача** 7. Головоломка Саладина.*

Эта история случилась давным-давно, еще во времена крестовых походов. Один из рыцарей был захвачен мусульманами в плен и предстал перед их предводителем - султаном Саладином, который объявил, что освободит пленника и его коня, если получит выкуп в 100 тысяч золотых монет. "О, великий Саладин, - обратился тогда к султану рыцарь, у которого за душой не было ни гроша, - ты лишаешь последней надежды. У меня на родине мудрому и находчивому пленнику дается шанс выйти на свободу. Если он решит заданную головоломку, его отпускают на все четыре стороны, если нет - сумма выкупа удваивается!"

"Да будет так, - ответил Саладин, и сам обожавший головоломки. - Слушай же. Тебе дадут двенадцать золотых монет и простые весы с двумя чашками, но без гирь. Одна из монет фальшивая, однако, неизвестно, легче она или тяжелее настоящих. Ты должен найти ее всего за три взвешивания. Не справишься с задачей до утра - пеняй на себя!" А вы смогли бы выкрутиться?

Задача 8. *Фальшивая монета.*

Имеется 8 с виду одинаковых монет. Одна из них фальшивая и известно, что она легче настоящей. Как с помощью всего лишь двух взвешиваний найти фальшивую монету? В Вашем распоряжении только лабораторные весы, которые показывают только больше - меньше.

Задача 9*. Точно в середине.*

Имеется 100 серебряных монет разных размеров и 101 золотая монета также разных размеров. Если у одной монеты размер больше, чем у другой, то она и больше весит, но это верно только для монет, сделанных из одного и того же металла. Все монеты можно легко упорядочить по размерам на глаз. Отличить золото от серебра можно тоже. Как за 8 взвешиваний определить, какая монета из всех 201 штук занимает по весу ровно 101-е место? Все 201 монеты также различны по весу. Весы с двумя чашками, как обычно.

Задача 10. *Задача Второй Мировой.*

Еще известная задача такого уровня: (Возможно это легенда, но очень уж красивая).

Во времена Второй Мировой Войны, английские ученые подбросили немецким ученым, чтобы они не решали военные проблемы, а решали головоломки, следующую логическую задачу.

Кладоискатели нашли клад и записку, в которой было написано: В этих 20 мешках с золотыми монетами есть один мешок с фальшивыми монетами. Известно, что фальшивая монета в два раза тяжелее настоящей.

Задача:

Как при помощи одного взвешивания определить в каком мешке находятся фальшивые монеты?

Примечание.

Взвешиванием называется тот момент, когда весы, типа коромысла, станут горизонтально, показывая, что на правой стороне весов и на левой стороне одинаковый вес.

И еще: англичане приделали приписку к задаче, что они потратили 10 тысяч человеко-часов для решения этой задачи.

***Задача 11**. Бальзам.*

Три человека купили сосуд, полностью заполненный 24 унциями бальзама. Позже они приобрели три пустых сосуда объемом 5, 11 и 13 унций. Как они могли бы поделить бальзам на равные части используя эти четыре сосуда? Постарайтсь решить задачу за наименьшее количество переливаний.

***Задача 12**. Банка сока.*

Имеются трёхлитровая банка сока и две пустые банки: одна - литровая, другая - двухлитровая. Как разлить сок так, чтобы во всех трёх банках было по одному литру?

Задача 13. *Ямайский ром.*

В одном порту моряк пришел в лавку с пустым бочонком на пять галлонов и попросил лавочника налить туда четыре галлона отборного ямайского рома. К несчастью, единственным сосудом для измерения был старый оловянный кувшин на три галлона. Как лавочник сумел точно отмерить четыре галлона с помощью этих двух емкостей?

Задача 14. *Фальшивая гирька.*

Имеются 6 гирь весом 1, 2, 3, 4, 5 и 6 г. На них нанесена соответствующая маркировка. Однако есть основания считать, что при маркировке гирь допущена одна ошибка. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах, на которых можно сравнить веса любых групп гирь, определить, верна ли имеющаяся на гирях маркировка?

Задача 15. *Точные весы.*

Имеется 9 одинаковых монет, одна из которых фальшивая и по этой причине легче остальных. Мы располагаем двумя весами без гирь, позволяющими сравнивать по весу любые группы монет. Однако одни из имеющихся весов являются грубыми, на них нельзя отличить фальшивую монету от настоящей. Их точность не позволяет уловить разницу в весе. Зато другие весы точные. Но какие весы грубые, а какие точные - неизвестно. Как в этой ситуации с помощью трех взвешиваний определить фальшивую монету?

Задача 16*. Находчивый студент.*

К продавцу, студенту-математику, подрабатывающему летом торговлей у бочки с квасом, подходят два веселых приятеля и просят налить им по литру кваса каждому. Продавец замечает, что у него есть лишь две емкости, трехлитровая и пятилитровая, и он не может выполнить их просьбу. Приятели предлагают 100 долларов, если продавец сможет выполнить их заказ, причем выдать им порции продавец должен одновременно. После некоторого размышления, продавец сумел это сделать. Каким образом? Заметим, что при переливаниях квас не *теряется и что полные емкости позволяют точно отмерять объемы 3 и 5 литров.*

Задача 17*. Алюминиевые шарики.*

Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина - алюминиевые, весом 10 г каждый, а вторая половина - дюралевые, весом 9.9 г каждый. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы количество шариков в кучках было одинаковым, а массы - разными. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

Задача 18. *Сортировка по весу.*

Пять различных по весу предметов требуется расположить в порядке убывания их веса. Пользоваться можно только простейшими весами без гирь, которые позволяют лишь установить, какой из двух сравниваемых по весу предметов тяжелее.

Как следует действовать, чтобы решить задачу оптимальным образом, то есть так, чтобы число взвешиваний было минимальным? Сколько взвешиваний придется при этом произвести?

Задача 19*. Элементарное переливание.*

Винодел обычно продает свое вино по 30 и по 50 литров и использует для этого кувшины только такого размера. Один из покупателей захотел купить 10 литров. Как винодел отмерил ему 10 литров пользуясь своими кувшинами?

Задача 20*. Задача Пуассона.*

Как из полного сосуда ёмкостью в 12 л отлить половину, пользуясь двумя пустыми сосудами ёмкостью в 8 и 5 л?

Задача 21*. Где фальшивые монеты?-2*

Есть 10 мешков по 10000 монет каждый. Несколько целиком забиты монетами на 1г. легче настоящих, в остальных монеты настоящие. Есть еще один мешок с настоящими монетами. За одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашах определите все мешки с фальшивыми монетами.

Задача 22*. Взвесить слона.*

Сможете ли вы повторить действия, которые предпринял в одной древней легенде восточный мудрец? Попробуйте. Вот условие.

Когда за доброе дело правитель страны решил наградить умного человека, тот пожелал взять столько золота, сколько весит слон. Но как же взвесить слона? В те времена не было таких весов. Что бы в подобной ситуации смогли придумать вы?

Задача 23*. Очередная задача на переливание.*

Имеются шестилитровая банка сока и две пустые банки: трех- и четырехлитровая. Как налить 1 литр сока в трехлитровую банку?

***Задача** 24. Материя.*

Эта задачка хоть и совсем не про взвешивания, но принцип ее решения такой же, как и у других задач данного раздела. Итак.

Как от куска материи в 2/3 метра отрезать полметра без помощи каких-либо измерительных приборов?

Задача 25*. 80 монет.*

Имеется 80 монет, одна из которых фальшивая, причем она легче других. За какое наименьшее число взвешиваний на весах без гирь можно найти фальшивую монету?

Задача 26*. Поделить квас.*

Двое должны разделить поровну 8 ведер кваса, находящегося в восьмиведерном бочонке. Но у них есть только два пустых бочонка, в один из которых входит 5 ведер, а в другой - 3 ведра. Спрашивается, как они могут разделить этот квас, пользуясь только этими тремя бочонками?

***Задача** 27. Делёж.*

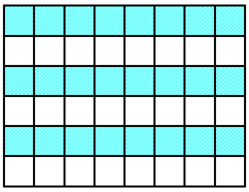
Имеются три бочонка вместимостью 6 вёдер, 3 ведра и 7 вёдер. В первом и третьем содержится соответственно 4 и 6 ведёр кваса. Требуется, пользуясь только этими тремя бочонками, разделить квас поровну.

Задача28:

Разделите квадрат 4×4 на две равные части четырьмя различными способами так, чтобы линия разреза шла по сторонам клеток.

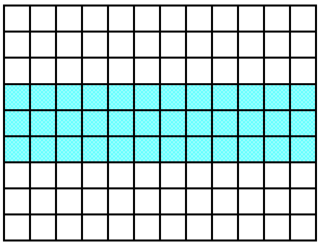
Задача 29:

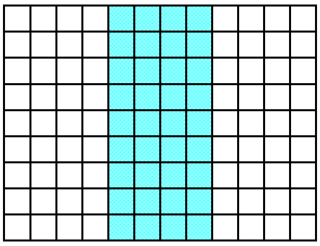
Флаг – 1. Разрежьте флаг с 6 полосами на две части так, что бы из них можно было сложить флаг с 8 полосами.



Задача 30:

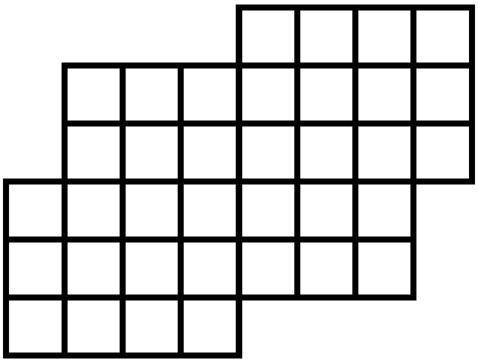
Флаг – 2. Разрежьте флаг А на четыре части так, чтобы из них можно было сложить флаг Б.





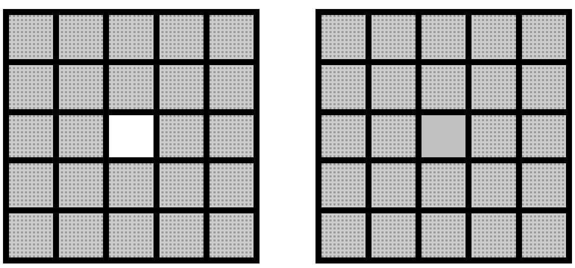
Задача 31:

Разрежьте фигуру на 4 равные части.



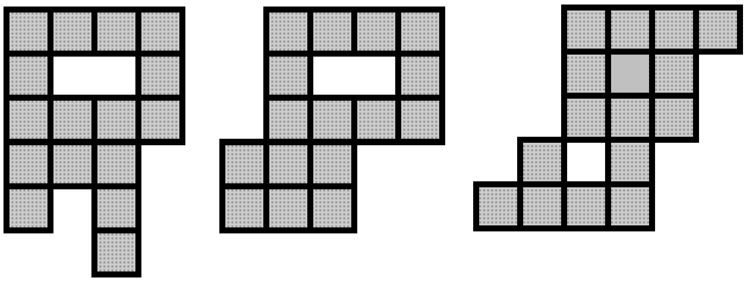
Задача 32:

Из двух — один. Разрежьте квадрат с дыркой двумя прямыми на 4 части так, чтобы из них и еще одного обычного квадрата 5×5 можно было сложить новый квадрат.



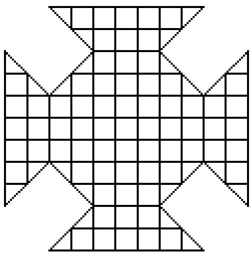
Задача 33:

Три фигуры. Для ***каждой*** из изображенных на рисунке фигур придумайте способ разрезать ее на две части, из которых можно сложить квадрат



Задача 34:

Мальтийский крест – 1. Разрежьте «мальтийский крест» (см. рисунок) на 6 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

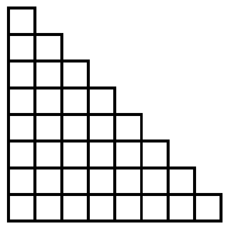


Задача 35:

Из трех — один. Дано три квадрата: 2×2, 6×6 и 9×9. Разрежьте самый большой квадрат на три части так, чтобы из полученных пяти фигур можно было сложить один квадрат.

Задача 36:

«Лесенка». Превратите «лесенку» в квадрат, разрезав ее на три части.



Задача 37:

В бидоне находится 12л молока. Как, имея в своем распоряжении два пустых сосуда емкостью 8л и 5л, отлить из бидона ровно 6л молока?

Задача 38:

Среди трех одинаковых по размеру монет одна фальшивая (легче остальных, равных по массе). Какое наименьшее количество взвешиваний на весах без гирь необходимо для того, чтобы выявить фальшивую монету?

Задача 39:

Имеется 61 монета, внешне неразличимые, из них 60 настоящих, одинаковой массы, одна фальшивая, тяжелее настоящих. Можно ли найти фальшивую монету с помощью четырех взвешиваний на весах без гирь?

Задача 40:

Имеется 5 монет, среди которых одна фальшивая (неизвестно, легче она или тяжелее настоящей). Масса настоящей монеты 5 г. Как при помощи двух взвешиваний на весах можно выявить фальшивую монету, имея в своем распоряжении одну гирю массой 5 г?

Подсказки, ответы, решения к задачам:

Задача 1.

Ответ: *Легко! Из первой шляпы берем 1 монету, из второй - 2, из третьей - 3 и т.д. Все это взвешиваем и отнимаем результат от идеального веса (в нашем случае 55*10=550 грамм). Получившееся число будет совпадать с номером шляпы с фальшивыми монетами.*

Задача 2.

Ответ/решение:

Отложим в сторону тринадцатую монету, а остальные обозначим следующим образом: FAKE MIND CLOT

Теперь взвешиваем одну четверку против другой по такой схеме:

3 монеты принимают участие в трех взвешиваниях

3 - только в одном

6 - в двух.

Например: FANO - KECT, AKNC - FMDL, FKIL - ADOT

Например, если результаты взвешивания будут такими: слева легче, равно, слева тяжелее, значит фальшивой будет монета, обозначенная буквой О. Причем, фальшивая монета будет легче настоящих.

А что если фальшивой окажется все-таки отложенная нами, тринадцатая монета? Все очень просто: в этом случае при всех трёх взвешиваниях весы будут сбалансированы. К сожалению, в этом случае нам не узнать легче или тяжелее тринадцатая монета, но в условии такого требования и не было.

***Задача 3**. Узнать вес хотя бы одной.*

***Ответ:** Да. 7+8 = 1+2+3+4+5, остается 6.*

***Задача 4.** Бракованные таблетки.*

Ответ:

Следует учинить непересекающиеся подмножества таблеток от разных упаковок: взять из первой упаковки одну таблетку, из второй - две, из третьей - четыре, из четвёртой - восемь, из пятой - 16, из шестой - 32, из седьмой - 64, из восьмой - 128. Всё это взвесить. Вычесть из полученного веса идеальный вес (идеальный вес каждой таблетки известен из документации, но можно обойтись и без него - подумайте как). Полученный излишек веса (он уже нормализован за счёт единичного излишка веса каждой таблетки) перевести в двоичный вид (ведь мы сформировали подмножества по двоичному закону). В этом числе номера разрядов, равные единице, и будут показывать номера бракованных упаковок.

***Задача 5**. Легче или тяжелее?*

Ответ:

Взвешиваешь 50 и 50 монет:

1) Равенство:

Берем оставшуюся монету и ставим ее в левую кучку вместо одной из имеющихся там

1.1 Левая кучка тяжелее => фальшивая монета тяжелее

1.2 Левая кучка легче => фальшивая монета легче

2) Неравенство:

Берем более тяжелую кучку и разбиваем ее на две кучки по 25 монет.

2.1 Вес кучек одинаковый => фальшивая монета легче

2.2 Вес кучек неодинаковый => фальшивая монета тяжелее

***Задача 6**. Развесить чай.*

Ответ:

1) На одну чашу весов положить гирю в 5 фунтов, на другую гирю в 9 фунтов. Затем уравновесить весы, насыпав 4 фунта чая в чашу с гирей на 5 фунтов.

2) Убрать гири с чаш весов, оставить 4 фунта в одной чаше и уравновесить весы, насыпав во вторую еще 4 фунта.

3) Еще раз отвесить 4 фунта.

4) И еще раз 4 фунта. Таким образом, после четырех взвешиваний в остатке будет тоже 4 фунта.

5-9) Разделить 4 фунта пополам, уравновешивая чаши весов.

***Задача** 7. Головоломка Саладина.*

***Ответ**:*

Эта задача была блестяще разобрана К. Л. Стонгом в майском номере журнала Scientific American за 1955 год. Одно из ее решений (а их довольно много) связано с троичной системой. Сначала запишите все числа от 1 до 12 в троичной системе. Замените в каждом числе цифру 2 на 0, а 0 на 2 и запишите рядом результат. У вас получится три столбца чисел:

1 001 221

2 002 220

3 010 212

4 011 211

5 012 210

6 020 202

7 021 201

8 022 200

9 100 122

10 101 121

11 102 120

12 110 112

Внимательно изучив эти числа, вы обнаружите все числа, в которых встречаются сочетания 01, 12, 20. Каждой из двенадцати монет поставим в соответствие одно из этих чисел.

При первом взвешивании на левую чашу весов кладем четыре монеты, обозначенные числами, которые начинаются с 0, а на правую чашу весов кладем те четыре монеты, которым соответствуют числа, начинающиеся с 2. Если монеты уравновесят друг друга, вы можете утверждать, что число, которое отвечает фальшивой монете, начинается с 1. Если перевесит левая чашка, то искомое число начинается с 0, а если правая - то с 2.

Взвешивая монеты второй раз, их надо распределять в зависимости от средней цифры. Если в центре стоит 0, монета кладется на левую чашу, если 2 - на правую. Вторая цифра числа, обозначающего фальшивую монету, определяется точно так же, как определялась его первая цифра при первом взвешивании.
Производя последнее взвешивание, вы кладете налево те монеты, которые обозначены числами, оканчивающимися на 0, а монеты, соответствующие числам, имеющим на конце 2, вы кладете на правую

чащу весов. Таким образом вы узнаете последнюю цифру нужного вам числа.

Задача 8. *Фальшивая монета.*

Ответ:

Делим монеты на две равные кучки. Из каждой кучки берем по 3 монеты, кладем на весы и взвешиваем. Если вес одинаковый, то взвешиваем оставшиеся 1и 1 монеты и выявляем фальшивую (более легкую). Если же одна группа из трех монет легче другой, значит там есть фальшивая монета. Оставляем более легкую группу из трех монет и кладем на весы 1и 1 и действуем по предыдущему алгоритму: если вес одинаков, значит, фальшива третья, а если нет, то та, которая легче.

Задача 9*. Точно в середине.*

Ответ / решение:

Раскладываем в два ряда все монеты в порядке возрастания размера: золотые отдельно, серебряные отдельно. Пусть первая по счету в каждом ряду монета самая большая (и тяжелая).

Среднюю по весу монету можно найти, последовательно взвешивая срединные монеты каждой из оставшихся линеек.

1) взвешиваем 51-ю золотую монету и 50-ю серебряную. Если первая тяжелее, то искомая монета находится где-то среди 52-101 золотой и 1-50 серебряной. Если легче, то искомая монета находится где-то среди 1-51 золотой и 51-100 серебряной. То есть, 51+50 монет. Остальные можно отложить.

2) взвешиваем опять срединные монеты. Так как число вариантов растет в геометрической прогрессии, буду рассматривать только итоги;) Из 51+50 монет выбираем сравниваем 25 и 26 монеты. Остается 26+25 монет.

3) Взвешиваем 13 и 13 монеты. Остается 13+13 или 13+12. Далее буду рассматривать только случай 13+13, 13+12 аналогично.

4) Взвешиваем 7 и 7. Остается 7+7.

5) Взвешиваем 4 и 3. Остается 4+3.

6) Здесь могу поподробнее, так как монет осталось мало. Пусть остались золотые монеты 1234 и серебряные ABC (все в порядке возрастания). Взвешиваем 2 и B. Если 2>B, то средняя монета какая-то из 34AB, если нет, то из 12C. Рассмотрим первый случай.

7) Взвешиваем 3 и A.

8а) если 3

8б) если 3>A, то взвешиваем 4 и A. Какая больше, та и искомая.

Задача 10. *Задача Второй Мировой.*

Ответ / решение:

Итак, берем из первого мешка 2 монеты, из второго - 4, из третьего - 6 и т.д. Эту кучу монет бросаем на одну чашу весов, после чего уравновешиваем весы, насыпая на вторую чашу монеты из какого-нибудь одного, например первого мешка.

*Если бы все монеты были настоящими, то чаша 1 весила бы 420 у.е. Но там-то у нас 2*х фальшивых монет, поэтому она весит 420+2*х у.е.*

Предположим, что мешок 1, которым мы уравновешивали весы, содержит настоящие монеты, тогда количество монет, истраченных на равновесие, будет где-то между 422 и 460. Нам остаётся только найти х: х = (кол-во понадобившихся монет - 420)/2

Если же мешок, монетами из которого мы уравновешиваем весы, оказался фальшивым, то равновесие будет достигнуто где-то на между 211 и 230 монетами. Естественно мы тогда поймём, что что-то здесь не так

Задача 11. *Бальзам.*

Ответ.

Сосуды могут содержать 24, 13, 11, и 5 унций соответственно:

Их начальное состояние 24, 0, 0, 0;

1 - 8, 0, 11, 5;

2 - 8, 11, 0, 5;

3 - 8, 13, 3, 0;

4 - 8, 8, 3, 5;

5 - 8, 8, 8, 0.

***Задача 12**. Банка сока.*

Ответ:

Можно разлить сок так:

1) наполнить литровую банку,

2) вылить её содержимое в двухлитровую банку,

3) наполнить литровую банку из трёхлитровой банки.

Теперь во всех банках будет по одному литру сока. Однако можно разлить сок и так:

1) наполнить двухлитровую банку,

2) наполнить из неё литровую банку.

Теперь во всех банках будет по одному литру сока.

***Задача 13.** Ямайский ром.*

Ответ:

Вот что сделал лавочник:

1) наполнил кувшин на три галлона и вылил из него ром в бочонок на пять галлонов;

2) снова наполнил кувшин на три галлона и вылил ром в бочонок до тех пор, пока тот не наполнится целиком;

3) в кувшине на три галлона остался один галлон; потом вылил ром из бочонка на пять галлонов обратно в большую бочку с ромом, а один галлон рома из кувшина вылил в бочонок моряка;

4) снова наполнил ромом кувшин на три галлона и вылил его содержимое в бочонок; теперь в бочонке - четыре галлона рома.

Задача 14. *Фальшивая гирька.*

Ответ:

На одну чашу весов кладем гири, маркированные 1, 2 и 3 г., а на другую - 6 г. Равновесие означает, что ошибка в маркировке возможна лишь внутри групп 1-2-3 и 4-5. При втором взвешивании на одну чашу кладем гири 3 и 5 г., на другую - 6 и 1 г. Если первая чаша перевесила, то ошибки а маркировке нет.

Задача 15. *Точные весы.*

Ответ:

Положим на весы №1 по четыре монеты на каждую чашку. Если одна группа монет перевесила, то остальное понятно - эти весы точные, и мы знаем 4 монеты, среди которых одна фальшивая. Пусть весы оказались в равновесии. Обозначим через А девятую монету и добавим к ней монеты В и С - по одной из каждой четверки. Оставшиеся две тройки монет положим на чаши весов №2. Худший вариант - вновь равновесие. Тогда на весах №2 сравниваем монеты В и С. В случае равновесия фальшивой будет монета А.

Задача 16. *Находчивый студент.*

Ответ:

Предложенная сумма существенно превышает стоимость кваса в бочке, и последнюю можно использовать как дополнительную емкость, слив квас бесплатно зрителям в их личные емкости. Возможный порядок действий:

а) отмеряем 7 литров следующим образом: (0,5)-(3,2)-(0,2)-(2,0)-(2,5). В этой записи первая цифра - количество кваса в трехлитровой емкости, вторая - в пятилитровой;
б) опоражниваем бочку, сливая из нее остатки кваса, и заливаем в нее отмеренные 7 литров; действуем по схеме (третье число - количество кваса в бочке): (0,0,7)-(3,0,4)-(0,3,4)-(3,3,1)-(1,5,1)-(1,0,1)-(1,1,0).

***Задача 17**. Алюминиевые шарики.*

Ответ:

Два. Делим на кучи (1) 666, (2) 666, (3) 666 и (4) 2.

Взвешиваем (1)-(2), (2)-(3). Если в обоих случаях равенство, то оставшиеся 2 шарика разные.

***Задача 18.** Сортировка по весу.*

***Ответ / решение**:*

Первым взвешиванием сравним любые 2 из 5 данных предметов. Пусть А - более легкий, а В - более тяжелый предмет. Тогда результат первого взвешивания запишем в виде A<B (читается: «A легче B»).

Затем сравним два других предмета и обозначим более легкий D а более тяжелый - E: D<E.

Пятый предмет обозначим C.

Третьим взвешиванием сравним предметы B и E. Обе возникающие здесь возможности приводят к аналогичным рассуждениям, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая B<E. В итоге после трех взвешиваний мы знаем, что A<B<E и D<E.

Четвертым взвешиванием сравним пятый предмет C с предметом B. Необходимо различать два случая:

а) B<C;

б) C<B.

В первом случае (B<C)

$A<B<E$, $D<E$ и $B<C$.

Сравним (для этого понадобится пятое взвешивание) предметы C и E. Здесь также необходимо различать два возможных случая: $E<C$ или $C<E$.

Если $A<B<E<C$, то место предмета D, более легкого, чем E, можно определить, сравнив A с D и B с D. Таким образом, для полного упорядочения пяти предметов по весу в этом случае необходимо произвести 7 взвешиваний.

В случае $A<B<C<E$ для определения места D также достаточно произвести два взвешивания, а именно: сначала сравнить D с B, а затем в зависимости от результата взвешивания сравнить D либо с A либо с C. В итоге мы снова производим 7 взвешиваний.

Во втором случае ($C<B$)

$A<B<E$, $C<B$ и $D<E$.

Сравним предметы A и C (пятое взвешивание). В обоих возможных случаях ($A<C<B$ или $C<A<B<E$) для определения места предмета D, о котором уже известно, что он легче предмета E, достаточно двух взвешиваний. Следовательно, и в случае, когда $C<B$, семи взвешиваний достаточно, чтобы расположить предметы в порядке возрастания их веса.

Поскольку мы исчерпали все возможные случаи, то доказательство на этом заканчивается.

***Задача 19**. Элементарное переливание.*

Ответ:

Сначала он наполнил 30-литровый кувшин и вылил его содержимое в 50-литровый. Потом опять наполнил 30-литровый и долил до полного заполнения в 50-литровый. В результате у него в кувшине останется 10 литров.

***Задача 20**. Задача Пуассона.*

Ответ:

Сначала наливаете 8 литров в 8л., потом из 8л. наливаете полный 5л., в результате получается, что в 12л. - 4 литра, в 8л - 3литра, а в 5л. - 5 литров.
Переливаете из 5л. в 12л. всю воду (или что там за жидкость), а из 8л. переливаете все 3 литра в 5л. В результате 9 литров в 12л, 0 литров в 8л., и 3 литра в 5л.

Переливаете из 12л. 8 литров в пустой 8л.,и в 12 л. остается 1 литр. Из 8л. доливаете в 5л., пока 5л. не станет полным, (в 5л. было 3л., след. долили мы еще 2литра из 8л.) Тогда в 8л. как раз остается 6л.

***Задача 21**. Где фальшивые монеты?-2*

Ответ:

Т.к. задача является небольшим обобщением вот этой задачи , то и решение получается тоже небольшой модификацией:

из каждого мешка надо брать не 1, 2 и так далее монет, а, например, по степеням двойки,

т.е. из первого мешка взяли 1 монету, из второго - 2, из третьего - 4, ... , из десятого - $2^9 = 512$ *монет.*

В итоге, взвесив отобранные монеты и узнав разницу в весе, полученное число раскладываем по степеням двойки (фактически переводим в двоичную систему счисления).

Например, если разница в граммах составила $65 = 64 + 1 = 1·2^0 + 0·2^1 + 0·2^2 + 0·2^3 + 0·2^4 + 0·2^5 + 1·2^6 + 0·2^7 + 0·2^8 + 0·2^9$.

Т.е. фальшивые монеты были в первом и седьмом мешках.

***Задача 22**. Взвесить слона.*

Ответ:

Мудрец сделал так: он поместил слона в лодку, затем отметил по борту уровень воды. Когда слона вывели из лодки, осталось только поместить туда золото.

Задача 23. *Очередная задача на переливание.*

Ответ:

Приведем одно из возможных решений в виде таблицы:

Банки	*6 л*	*4 л*	*3 л*
До переливания	*6*	*0*	*0*
После 1-го переливания	*2*	*4*	*0*
После 2-го переливания	*2*	*1*	*3*
После 3-го переливания	*5*	*1*	*0*
После 4-го переливания	*5*	*0*	*1*

Задача *24. Материя.*

Ответ:

Кусок материи в 2/3 метра надо сложить пополам. Образовавшаяся линия сгиба поделит его на две равные части по 1/3 метра. Затем надо сложить его еще раз пополам. Образовавшихся линии сгиба поделят кусок материи на четыре равные части по 1/6 метра. Три таких части - это 3/6 метра или искомая 1/2 метра.

Задача 25. *80 монет.*

Ответ:

Фальшивую монету можно определить за 4 взвешивания. Алгоритм следующий. Первое взвешивание: кладем на чаши по 27 монет. В случае равновесия фальшивая среди оставшихся 26. Если одна чаша легче, то фальшивая среди лежащих на ней 27. Второе взвешивание: кладем на обе чаши по 9 монет из числа "подозреваемых" и рассуждаем аналогично. В третьем взвешивании положим на чаши по 3 монеты, а в четвертом - по *одной. Как видим, здесь деление не пополам, а на три по возможности равные части.*

***Задача 26**. Поделить квас.*

Ответ:

Приведем два решения в виде двух таблиц.

Решение 1:

Бочонки	*Восьмиведерный*	*Пятиведерный*	*Трехведерный*
До переливания	*8*	*0*	*0*
После 1-го переливания	*3*	*5*	*0*
После 2-го переливания	*3*	*2*	*3*
После 3-го переливания	*6*	*2*	*0*
После 4-го переливания	*6*	*0*	*2*
После 5-го переливания	*1*	*5*	*2*
После 6-го переливания	*1*	*4*	*3*
После 7-го переливания	*4*	*4*	*0*

Решение 2:

Бочонки	*Восьмиведерный*	*Пятиведерный*	*Трехведерный*

До переливания	8	0	0
После 1-го переливания	5	0	3
После 2-го переливания	5	3	3
После 3-го переливания	2	3	1
После 4-го переливания	2	5	1
После 5-го переливания	7	0	0
После 6-го переливания	7	1	3
После 7-го переливания	4	1	0
После 8-го переливания	4	4	

***Задача** 27. Делёж.*

Ответ:

Решение 1:

Бочонки	Шестиведерный	Трехведерный	Семиведерный
До переливания	4	0	6
После 1-го переливания	1	3	6
После 2-го	1	2	7

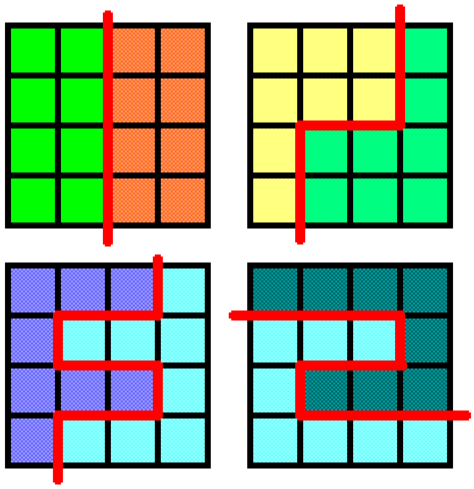
переливания			
После 3-го переливания	*6*	*2*	*2*
После 4-го переливания	*5*	*3*	*2*
После 5-го переливания	*5*	*0*	*5*

Решение 2:

Бочонки	*Шестиведерный*	*Трехведерный*	*Семиведерный*
До переливания	*4*	*0*	*6*
После 1-го переливания	*4*	*3*	*3*
После 2-го переливания	*6*	*1*	*3*
После 3-го переливания	*2*	*1*	*7*
После 4-го переливания	*2*	*3*	*5*
После 5-го переливания	*5*	*0*	*5*

Задача28:

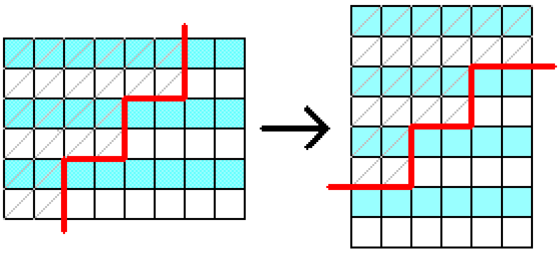
Ответ



Задача 29:

Флаг – 1.

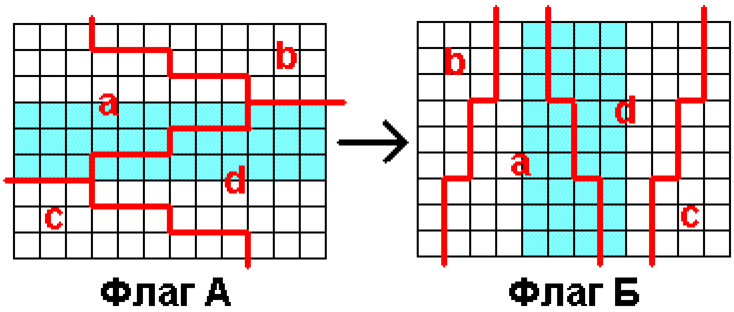
Ответ



Задача 30:

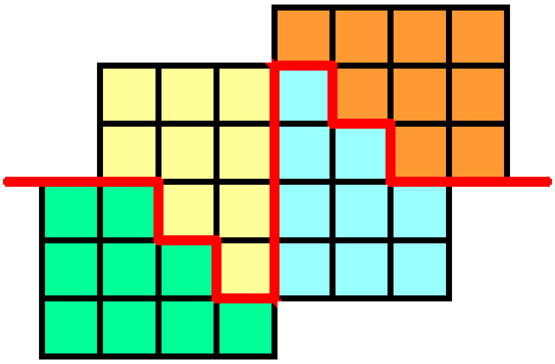
Флаг – 2.

Ответ



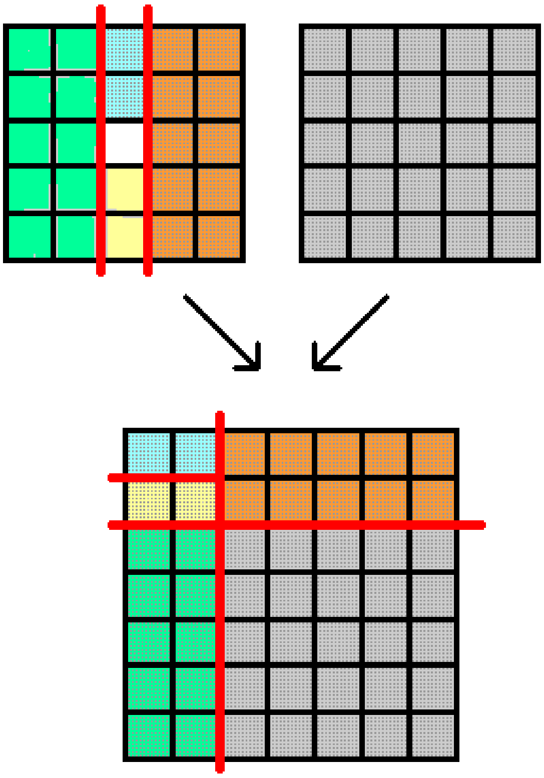
Задача 31:

Ответ



Задача 32:

Ответ.



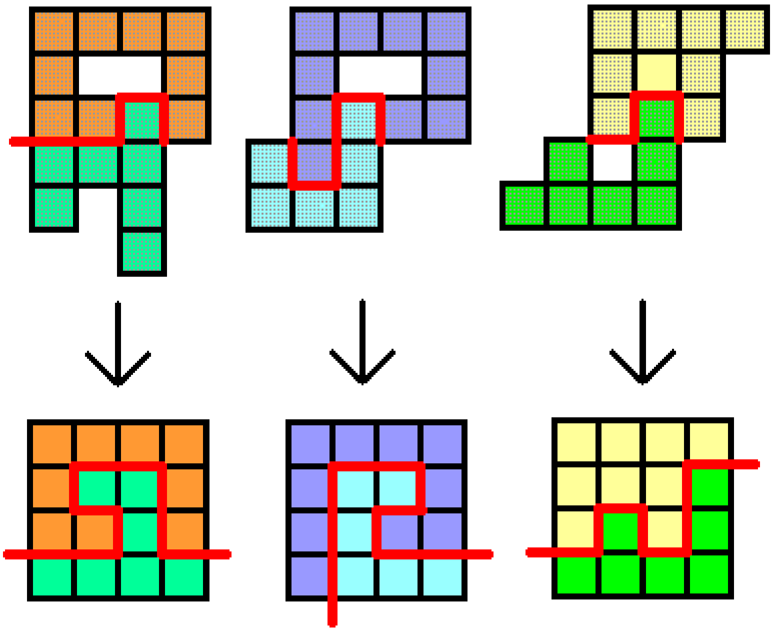
Решение. Здесь стоит сначала вычислить сторону квадрата, который должен получиться. Он будет состоять из стольких же клеток, что и исходные фигуры, а их общая площадь составляет 5·5+(5·5-1)=49 клеток. $49=7^2$, поэтому сторона квадрата равна 7 клеткам. Значит, нужно каким-то образом «нарастить» квадрат 5×5.

Разрезать квадрат с дыркой на 4 части двумя прямыми можно, только если эти прямые касаются краев дырки. Сделать это так, чтобы разрезу проходили по сторонам клеток, можно только так, как показано на рисунке (см. Ответ к этой задаче). После того, как эти рассуждения проведены, завершить решение не составит труда.

Задача 33:

Три фигуры.

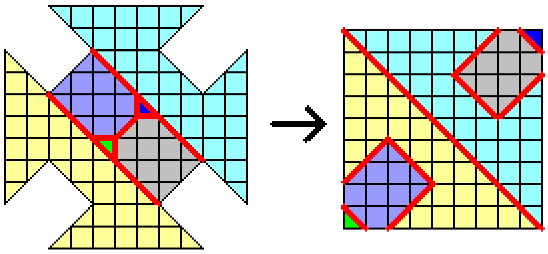
Ответ



Решение. Обратим внимание, что каждая из указанных фигур состоит из 16=4·4 клеток, значит, квадрат получится размера 4×4. Дальше надо постараться «увидеть» часть этого квадрата на рисунке и часть фигуры, которую надо отрезать и передвинуть.

Задача 34:

Мальтийский крест – 1.

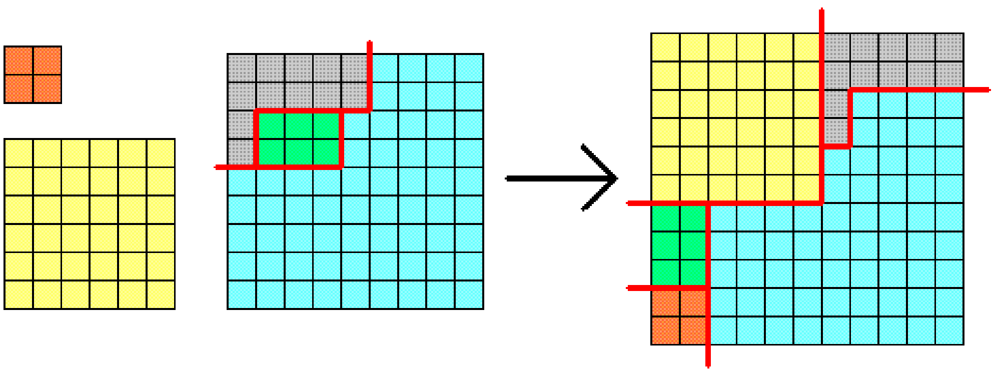


Ответ

Решение: В этой задаче не стоит искать сторону квадрата, который должен получиться. Лучше просто внимательно посмотреть на рисунок. У мальтийского креста 4 оси симметрии: вертикальная, горизонтальная и две диагональных (как, впрочем, и у квадрата). Обратим особое внимание на диагональную ось симметрии и постараемся делать наши разрезы симметричными относительно нее. Если провести два длинных диагональных разреза (см. рисунок в Ответе к этой задаче), «вытащить» прямоугольник, образовавшийся внутри, а оставшиеся две части сдвинуть друг к другу, получится «квадрат» с двумя «дырками» в углах. Чтобы их заполнить, надо разрезать оставшийся прямоугольник на 4 части. Это легче будет сделать, вновь принимая во внимание соображения симметрии.

Задача 35:

Ответ

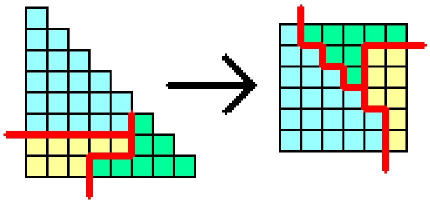


Решение. В этой задаче несложно вычислить площадь квадрата, который мы пытаемся собрать. Она равна $2\cdot2+6\cdot6+9\cdot9=4+36=81=121=11^2$, поэтому квадрат будет иметь сторону 11. Дальнейший ход решения зависит от вашего воображения. Кстати, вполне возможно, что приведенный в ответе способ разрезания — не единственный.

Задача 36:

«Лесенка».

Ответ



Задача 37:

Решение. Наполнить из бидона 8-литровый сосуд, затем из него наполнить

5-литровый, после чего в 8-литровом останется 3 л. Возвращаем из 5-литрового сосуда его содержимое в бидон и переливаем из 8-литрового в 5-литровый 3 л. Затем наполним из бидона 8-литровый сосуд. Долить из 8-литрового сосуда 5-литровый доверху, а поскольку в нем уже было 3 л, мы отольем из 8-литрового 2 л молока. В результате, в 8-литровом сосуде останется 6 л молока. Решение можно изобразить в виде таблицы:

Сосуд емкостью 8л	0	8	3	3	0	8	6
Сосуд емкостью 5л	0	0	5	0	3	3	5

Задача 38:

Решение. Для того, чтобы выявить фальшивую монету, достаточно одного взвешивания. Обозначим монеты: А, В и С. Если поместить монеты А и В на чашки весов, то возможны три случая:

если монета А окажется легче монеты В, то она и является фальшивой;

если монета В окажется легче монеты А, то она и является фальшивой;

если весы будут находится в равновесии, то фальшивой является отложенная нами монета С.

Нам удалось обойтись одним взвешиванием благодаря тому, что мы знали, легче фальшивая монета настоящей или тяжелее.

Задача 39:

Решение. Разобьем монеты на три группы: в первой и второй группах по 21 монете, в третьей – 19 монет. На чашки весов поместим две группы по 21 монете. Возможны два случая: чашки весов находятся в равновесии и чашки весов не уравновешены.

1). Пусть чашки весов находятся в равновесии. Следовательно, фальшивая монета находится в составе третьей группы, состоящей из 19 монет. Разобьем эти 19 монет на три группы: первые две по 7 монет и третья из 5 монет. Поместим первые две на чаши весов. Если они находятся в равновесии, то фальшивая монета находится в составе группы из 5 монет. В этом случае разбиваем ее на три группы: первые две по 2 монеты и третья – из одной монеты. Если разместить первые две группы на чашках весов, то возможны два случая: если чашки находятся в равновесии, то фальшивой окажется единственная монета третьей группы; если одна из групп окажется тяжелее, то в ее составе – фальшивая монета. Поскольку группа содержит две монеты, нам достаточно еще одного взвешивания, чтобы четвертым взвешиванием выявить фальшивую монету.

Вернемся ко второму взвешиванию. Пусть одна из групп в составе 7 монет, находящаяся на чашке весов, тяжелее другой. Тогда в ее составе фальшивая монета. Разбиваем эти 7 монет на три группы: первые две – по 3 монеты, третья – в составе одной монеты. Первые две группы разместим на чашках весов (это третье взвешивание). Если чашки весов находятся в равновесии, то фальшивой является единственная монета третьей группы. Если одна из групп на весах тяжелее, то в ее составе находится фальшивая. Две из этих трех монет разместим на весах (это четвертое, последнее взвешивание). Если весы будут находиться в равновесии, то фальшивой является третья, не попавшая на весы монета. Если одна из монет на весах тяжелее, то она и является фальшивой.

2). Вернемся к первому взвешиванию. Пусть одна из групп в составе 21 монеты на чашке весов тяжелее другой. Тогда в ее составе находится фальшивая монета. Разобьем 21 монету на три группы по 7 монет в каждой. Разместим две из них на чашках весов (это второе взвешивание). Если они находятся в равновесии, то фальшивая монета находится в составе третьей группы, если одна из групп на чашках весов тяжелее другой, то фальшивая монета – в ее составе. В любом случае количество монет, в составе которых находится фальшивая, равно семи. Рассматривая предыдущий случай, мы уже показали, как за два взвешивания выявить фальшивую монету из семи данных. Таким образом, и в этом случае нам оказалось достаточно четырех взвешиваний.

Задача 40:

Решение. Обозначим монеты A, B, C, D, E. Поместим монеты A и B на одну чашку весов, а монету C и гирю – на другую (первое взвешивание). Если весы находятся в равновесии, то среди монет на чашках весов нет фальшивой и, следовательно, фальшивой является одна из монет D и E. Следующим взвешиванием разместим на одной из чашек весов монету D, а на второй – гирю (второе взвешивание). Если весы находятся в равновесии, то монета D – настоящая, а следовательно, монета E – фальшивая. Если же равновесия при втором взвешивании нет, то фальшивой является монета D.

Вернемся к первому взвешиванию. Если тяжелее окажется та чашка весов, на которой размещены монеты A и B, то фальшивая монета среди трех: A, B (тогда фальшивая монета тяжелее настоящих) или C (тогда она легче). Отложенные монеты D и E в этом случае – настоящие. Разместим теперь на одной из чашек весов монеты A и C, а на другой – настоящие монеты D и E (второе взвешивание). Если теперь перевесит чашка весов, на которой находятся монеты A и C, то фальшивой является монета A (тяжелее настоящей может быть монета A, но не монета C). Если перевесит чашка весов, на которой находятся настоящие монеты D и E, то фальшивой является монета C (легче настоящей может быть монета C, но не монета A). Если же чашки весов при втором взвешивании будут находиться в равновесии, то фальшивой является монета B (в этом случае монеты A и C настоящие).

Интернет - источники:

http://mathem.hut1.ru/z_all.htm

http://mmmf.msu.ru/archive/20052006/z5/15.html

http://logicumm.ru/ves/

http://www.smekalka.pp.ru/weight.html

Глава 6.

задачи на четность

Глава 6. Задачи на четность

«Успех – это способность

преодолевать препятствия”

Вы, конечно, знаете, что числа бывают ***четные*** и ***нечетные.***

Четные числа - это те, которые делятся на 2 без остатка (например, 2, 4, 6 и т.п.). Каждое такое число можно записать в виде 2K, подобрав подходящее целое K.

Нечетные числа - это те, которые при делении на 2 дают в остатке 1 (например, 1, 3, 5 и т.п.). Каждое такое число можно записать в виде 2K + 1, подобрав подходящее целое K.

Говоря о чётности, надо помнить, что только целые числа могут быть чётными и нечётными. Поэтому число вида 2n, где n- любое целое число, всегда чётно, а число вида 2n+1 всегда нечётно. Число 0 является чётным числом.

Многие задачи решаются путем использования свойств четности чисел. Рассмотрим *некоторые свойства чётности:*

- ✓ Произведение любого целого числа на чётное число **чётно**.
- ✓ Произведение двух нечётных чисел **нечётно**.
- ✓ Сумма двух чисел разной чётности **нечётна**.
- ✓ Сумма двух чисел одной чётности **чётна**.
- ✓ Если сумма двух чисел нечётна, то слагаемые имеют разную чётность.
- ✓ Если сумма двух чисел чётна, то слагаемые имеют одинаковую чётность.
- ✓ Чётность суммы двух чисел равна чётности их разности.
- ✓ Чётность суммы совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

Рассмотрим несколько задач, решение которых построено на четности чисел:

Задача 1:

Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могли ли получить число 1101181106101822452154З?

Решение:

Если произведение $(x - y) \cdot x \cdot y$ нечётно, то нечётны все множители, то есть $(x - y)$, x и y. А это невозможно, так как если числа x и y нечётны, то их разность $x - y$ чётна.

Ответ: нет, не могут.

Задача 2:

Чётова пишет на доску одно целое число, а Нечётов — другое. Если произведение чётно, победителем объявляют Чётову, если нечётно, то Нечётова. Может ли один из игроков играть так, чтобы непременно выиграть?

Решение:

Чётова может написать число 0. (Или любое другое чётное число.) Произведение любого чётного числа и любого целого числа чётно, поэтому Чётова всегда будет выигрывать.

Задача 3.

Сумма трёх чисел нечётна. Сколько слагаемых нечётно?

Решение:

Одно или три.

Нетрудно привести примеры, что оба случая возможны. Остальные два случая (нечётных слагаемых два или нет совсем) легко приводятся к противоречию.
ВЫВОД:
Чётность суммы совпадает с чётностью количества нечётных слагаемых.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4

Не вычисляя суммы 1+2+3+……+1999, определите её чётность.

Задача 5.

Ученица 5 класса Катя и несколько ее одноклассников встали в круг, взявшись за руки. Оказалось, что каждый держит за руки либо двух мальчиков, либо двух девочек. Если в кругу стоит пять мальчиков, то сколько там стоит девочек?

Задача 6 .

Вася на каникулах собирается съездить в Испанию. Он решил прочитать книгу об известном испанском архитекторе Антонио Гауди. Он узнал, что в его творчестве много раз присутствовал магический квадрат 4×4 (такой квадрат, сумма чисел в каждой строке и каждом столбце которого одинакова). Вася задумался: а можно ли составить такой квадрат из первых 16 простых чисел? А вы как думаете?

Задача 7.

Вася читал политический роман. В нем рассказывалось про страну, в парламенте которой две палаты, и в обеих палатах одинаковое число депутатов. В голосовании по важному вопросу приняли участие все депутаты, причем воздержавшихся не было. В результате голосования председатель сообщил, что решение принято с преимуществом в 23 голоса. Вася не стал дальше читать этот роман, так как его автор совсем не подумал о возможности такого голосования. В чем была ошибка автора?

Задача 8.

Следующая Васина книга была про капитана Кука. Уже под конец книги капитан Кук попал в плен к гавайскому племени. Их главарь требует у него выкуп, причем, будучи суеверным, хочет получить желаемую сумму ровно тринадцатью монетами. У Кука были только монеты достоинством в 10, 30, 70 и 150 дублонов, а выкуп был назначен в 1000 дублонов. Вася понял, чем кончится дело, и не стал дочитывать книгу. Как и что понял Вася?

Задача 9:

Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, поворачивая на 90 градусов каждые 15 минут. Доказать, что она может вернуться в исходную точку только через целое число часов.

Задача 10:

Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей?

Задача 11:

Петя купил общую тетрадь объемом 96 листов и пронумеровал все ее страницы по порядку числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 1990?

Задача 12:

Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Задача 13:

Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

Задача 14:

В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки « + » и « – » так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Замечание: учтите, что отрицательные числа также бывают четными и нечетными.

Задача 15:

Кузнечик прыгает по прямой, причем в первый раз он прыгнул на 1 см в какую-то сторону, во второй раз – на 2 см и так далее. Докажите, что после 1985 прыжков он не может оказаться там, где начинал.

Задача 16:

На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 1984, 1985. Разрешается стереть с доски любые два числа и вместо них записать модуль их разности. В конце концов, на доске останется одно число. Может ли оно равняться нулю?

Задача 17:

Можно ли покрыть шахматную доску доминошками 1×2 так, чтобы свободными остались только клетки a1 и h8?

Задача 18:

К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы четна.

Задача 19:

В народной дружине 100 человек и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый с каждым дежурил ровно один раз?

Задача 20:

На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка АВ. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки А не равна сумме расстояний от этих точек до точки В.

Задача 21:

По кругу расставлено 9 чисел – 4 единицы и 5 нулей. Каждую секунду над числами проделывают следующую операцию: между соседними числами ставят ноль, если они различны, и единицу, если они равны; после этого старые числа стирают. Могут ли через некоторое время все числа стать одинаковыми?

Задача 22:

25 мальчиков и 25 девочек сидят за круглым столом. Докажите, что у кого-то из сидящих за столом оба соседа – мальчики.

Задача 23:

Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.

Задача 24:

Есть 101 монета, из которых 50 фальшивых, отличающихся по весу на 1 грамм от настоящих. Петя взял одну монету и за одно взвешивание на весах со стрелкой, показывающей разность весов на чашках, хочет определить фальшивая ли она. Сможет ли он это сделать?

Задача 25:

Можно ли выписать в ряд по одному разу цифры от 1 до 9 так, чтобы между единицей и двойкой, двойкой и тройкой, …, восьмеркой и девяткой было нечетное число цифр?

Задача 26.

На плоскости расположено 13 шестеренок, соединенных по цепочке. Могут ли все шестеренки вращаться одновременно? А если шестеренок 14?

Задача 27.

Квадрат 5х5 заполнен числами так, что произведение чисел в

каждой строке отрицательно. Доказать, что найдется столбец, в котором произведение чисел отрицательно.

Задача 28.

Можно ли доску размером 5х5 заполнить доминошками размером 1х2?

Задача 29.

16 корзин расположили по кругу. Можно ли в них расположить 55 арбузов так, чтобы количество арбузов в любых двух соседних корзинах отличалось на 1?

Задача 30.

Сумма 2002 натуральных чисел - число нечетное. Каким числом: четным или нечетным является произведение этих чисел?

Задача 31.

В вершинах куба записаны числа 2, 0, 0, 3, 1, 9, 5, 7. За один ход разрешается прибавить к числам, стоящим на концах одного ребра, одно и то же целое число. Можно ли за несколько ходов получить нули во всех вершинах?

Задача 32.

У марсиан бывает произвольное число рук. Однажды все марсиане взялись за руки так, что свободных рук не осталось. Докажите, что число марсиан, у которых нечетное число рук, четно.

Задача 33.

Можно ли нарисовать 9-звенную замкнутую ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?

Задача 34.

На вешалке висят 20 платков. 17 девочек по очереди подходят к вешалке и либо снимают, либо вешают платок. Может ли после ухода девочек остаться ровно 10 платков?

Задача 35.

На доске написаны натуральные числа от 1 до 2010. Разрешается стереть любые два числа и вместо них записать их разность. Сколько раз нужно выполнить эту операцию, чтобы на доске осталось одно число? Какое это число – четное, или нечетное?

Задача 36.

Из поврежденной книги выпала часть сшитых вместе листов. Номер первой выпавшей страницы – 143. Номер последней записан теми же цифрами, но в ином порядке. Сколько страниц выпало из книги?

Задача 37.

Если в числовой автомат ввести какое-то число, то он может за один шаг прибавить к нему 2 или 3 или умножить его на 2 или на 3. В автомат ввели число 1 и заставили его перебрать все возможные комбинации из трех ходов. Сколько раз при этом в результате получились четные числа?

Задача 38.

В одном месяце три среды выпали на четные числа. Какого числа в этом месяце было второе воскресенье?

Решения, ответы к задачам

Задача 4

Решение:

В этой сумме 1000 нечётных слагаемых. Следовательно, она чётна.

Задача 5.

Решение.

Одна девочка в кругу уже есть — это сама Катя. Тогда соседние с ней мальчики должны стоять между двумя девочками и так далее. То есть если с одной стороны от мальчика стоит девочка, то и с другой тоже. Поэтому мальчики и девочки в кругу чередуются. Значит, мальчиков и девочек там равное количество, а именно по 5.

Ответ. 5 девочек.

Задача 6 .

Решение.

Среди первых 16 простых чисел (да и вообще среди простых чисел) только число 2 четно, а все остальные нечетны (иначе они делились бы на 2 и были бы составными). В строке, где находится число 2, будет одно четное число и три нечетных, значит, сумма чисел в этой строке также будет нечетна. А в остальных строках будет по четыре нечетных числа, и их сумма будет четна. Поэтому магический квадрат из первых 16 простых чисел составить нельзя.

Ответ. Нельзя.

Задача 7.

Решение.

Предположим, что «против» проголосовало n депутатов, тогда «за» проголосовало n+23 депутатов. Поскольку голосовали все, то общее число депутатов в парламенте равно $n+n+23=2n+23$. Это нечетное число, поскольку $2n$ четно, а 23 нечетно. Но поскольку в обеих палатах парламента равное число депутатов, то общее число депутатов в парламенте должно быть четным. Полученное противоречие доказывает, что автор книги ошибся.

Задача 8.

Решение.

Числа 10, 30, 70 и 150 состоят из нечетного числа десятков, поэтому сумма 13 монет с такими достоинствами тоже будет состоять из нечетного числа десятков. А число 1000 состоит из 100, то есть четного числа, десятков. Поэтому набрать ровно 1000 дублонов монетами по 10, 30, 70 и 150 дублонов не удастся.

Ответ.

Вася понял, что капитан Кук при всем желании не сможет выполнить требования главаря племени и дела его, по всей видимости, очень плохи.

Задача 9:

Решение:

Вправо улитка должна ползти столько же времени, сколько влево, а вверх – столько же, сколько вниз. Значит, улитка проползла чётное число вертикальных и чётное число горизонтальных «пятнадцатиминутных» отрезков. К тому же вертикальные и горизонтальные отрезки чередуются, значит, общее их число делится на 4.

Задача 10:

Ответ: Нет

Задача 11:

Решение:

На каждом листе сумма номеров страниц нечетна, а сумма 25 нечетных чисел – нечетна.

Задача 12:

Решение:

Среди этих чисел – четное число «минус единиц», а для того, чтобы сумма равнялась нулю, их должно быть ровно 11.

Задача 13:

Решение:

Среди этих чисел одно (2) – четное, а остальные – нечетные. Поэтому в той строке, где стоит двойка, сумма чисел нечетна, а в других – четна.

Задача 14:

Решение:

В самом деле, сумма чисел от 1 до 10 равна 55, и изменяя в ней знаки, мы меняем все выражение на четное число.

Задача 15:

Решение:

Указание: Сумма $1 + 2 + \ldots + 1985$ нечетна.

Задача 16:

Решение:

Проверьте, что при указанных операциях четность суммы всех написанных на доске чисел не меняется.

Задача 17:

Решение:

Каждая доминошка покрывает одно черное и одно белое поле, а при выкидывании полей a1 и h8 черных полей остается на 2 меньше, чем белых.

Задача 18:

Решение:

Разберите два случая: сумма первой и последней цифр числа меньше 10, и сумма первой и последней цифр числа не меньше 10. Если допустить, что все цифры суммы – нечетны, то в первом случае не должно быть ни одного переноса в разрядах (что, очевидно, приводит к противоречию), а во втором случае наличие переноса при движении справа налево или слева направо чередуется с отсутствием переноса, и в результате мы получим, что цифра суммы в девятом разряде обязательно четна.

Задача 19:

Решение:

Так как на каждом дежурстве, в котором участвует данный человек, он дежурит с двумя другими, то всех остальных можно разбить на пары. Однако 99 – нечетное число.

Задача 20:

Решение:

Для любой точки X, лежащей вне AB, имеем AX – BX = ± AB. Если предположить, что суммы расстояний равны, то мы получим, что выражение ± AB ± AB ± … ± AB, в котором участвует 45 слагаемых, равно нулю. Но это невозможно.

Задача 21:

Решение:

Ясно, что комбинация из девяти единиц раньше, чем девять нулей, получиться не может. Если же получилось девять нулей, то на предыдущем ходу нули и единицы должны были чередоваться, что невозможно, так как их всего нечетное количество.

Задача 22:

Решение:

Проведем наше доказательство от противного. Занумеруем всех сидящих за столом по порядку, начиная с какого-то места. Если на k-м месте сидит мальчик, то ясно, что на (k – 2)-м и на (k + 2)-м местах сидят девочки. Но поскольку мальчиков и девочек поровну, то и для любой девочки, сидящей на n-м месте, верно, что на (n – 2)-м и на (n + 2)-м местах сидят мальчики. Если мы теперь рассмотрим только тех 25 человек, которые сидят на «четных» местах, то получим, что среди них мальчики и девочки чередуются, если обходить стол в каком-то направлении. Но 25 – нечетное число.

Задача 23:

Решение:

Ясно, что количество a участков, на которых улитка ползла вверх или вниз, равно количеству участков, на которых она ползла вправо или влево. Осталось только заметить, что a – четно.

Задача 24:

Решение:

Нужно отложить данную монету в сторону, а затем разделить остальные 100 монет на две кучки по 50 монет, и сравнить веса этих кучек. Если они отличаются на четное число грамм, то интересующая нас монета настоящая. Если же разность весов нечетна, то монета фальшивая.

Задача 25:

Решение:

В противном случае все цифры в ряду стояли бы на местах одной и той же четности.

Задача 26.

Решение:

Пусть первая шестеренка вращается по часовой стрелке, тогда вторая - против часовой стрелки, третья - по часовой стрелке и т. д. Получим, что двенадцатая будет вращаться против часовой стрелки, а тринадцатая - по часовой стрелке.

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я	13-я	14-я

Значит, первая должна вращаться против часовой, что противоречит тому, что она вращается по часовой стрелке. Поэтому, все 13 шестеренок вращаться одновременно не могут. А вот 14 уже могут.

Задача 27.

Решение:

найдём произведение всех чисел в квадрате: так как произведение чисел в одной строке отрицательно, то произведение всех чисел (5 строк) будет отрицательно. Но с другой стороны, произведение всех чисел равно и произведению чисел в столбцах (5 столбцов). А так как произведение всех чисел отрицательно, то найдется столбец, в котором произведение чисел является отрицательным.

Задача 28.

Решение:

Нет, так как общее число клеток - 25 не делится на 2.

Задача 29.

Решение:

Если число арбузов в соседних корзинах отличается на 1, то характер четности числа арбузов в этих корзинах будет разным.

1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	7-я	8-я	9-я	10-я	11-я	12-я	13-я	14-я	15-я	16-я
Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н	Ч	Н

$$\underbrace{Ч + Ч + \ldots + Ч = Ч}_{8\text{-РАЗ}} \qquad \underbrace{Н + Н + \ldots + Н = Ч}_{8\text{-РАЗ}}$$

$$Ч + Ч = Ч$$ это 55 - нечётное число

Тогда четность числа арбузов в корзинах будет чередоваться, поэтому в половине корзин будет четное число арбузов, а в половине нечетное.

Так как четность суммы нескольких целых чисел совпадает с четностью количества нечетных слагаемых, то общее число арбузов в 8 корзинах с четным числом арбузов и в 8 корзинах с нечетным числом арбузов будет четным. По условию же всего арбузов - 55, а это нечетное число. Значит, разложить нельзя.

Ответ: нельзя.

Задача 30.

Решение:

Количество чисел	*Сумма чисел*	*Произведение*
2002- чётное	*Нечётное*	*?*

Возможные варианты
Н+Н=Ч
Ч+Ч=Ч
Н+Ч=Н

Возможные варианты
НхН= Н
ЧхЧ=Ч
НхЧ= Ч

Так как сумма 2002 чисел - число нечетное, то число нечетных слагаемых - нечетно. Тогда среди 2002 чисел есть хотя бы одно четное число. А значит, произведение 2002 чисел будет четным числом.

Ответ: чётное число.

Задача 31.

Решение:

Так как сумма данных чисел: число 27 - нечетное, а при прибавлении двух одинаковых целых чисел четность суммы не меняется.

Возможные варианты

Пример

Н + Н = Ч

27 + Ч = Н

Ч + Ч = Ч

27 + Ч = Н

Т.о. получить все нули во всех вершинах не получится (сумма восьми нулей – число четное).

Ответ: нельзя.

Задача 32.

Решение.

Назовем марсиан с четным числом рук четными, а с нечетным нечетными. Поскольку руки образуют пары, то общее число рук четно. Общее число рук у четных марсиан четно, поэтому общее число рук у нечетных марсиан тоже четно. Следовательно, число нечетных марсиан четно.

Задача 33.

Решение:

Если бы такое было возможно, то все звенья ломаной разбились бы на пары пересекающихся. Однако тогда число звеньев должно быть четным.

Отметим ключевой момент рассуждения: если предметы можно разбить на пары, то их число - четно.

Задача 34.

Решение.

После подхода первой девочки количество оставшихся платков либо 19, либо 21 (нечетное количество); после подхода второй девочки – либо 18, либо 20, либо 22 (четное количество); после подхода третьей девочки – либо 17, либо 21, либо 23, либо 19 (нечетное количество). После подхода 17 девочки остается нечетное количество платков. Получается противоречие. Значит, 10 платков остаться не может.

Задача 35.

Решение:

Каждый раз количество чисел уменьшается на 1 (вместо двух остается одно). Было 2010 чисел, осталось одно, шагов 2009. Так как числа, записанные на доске, натуральные и взяты последовательно, то они отличаются друг от друга на единицу, и, учитывая, что количество чисел четно, можно сделать вывод - в результате останется нечетное число.

Ответ: 2009 раз нужно выполнить операцию, чтобы на доске осталось одно число. Оставшееся число будет нечетное.

Задача 36.

Решение:

Номер последней страницы должен быть четным числом, т.к. номер первой – число нечетное. Значит, номер последней страницы заканчивается цифрой 4. Осталось расставить цифры 1 и 3. Если на первом месте будет стоять цифра 1, то получим, что номер последней страницы меньше номера первой выпавшей, чего быть не может. Таким образом, получаем, что номер последней страницы 314. Количество выпавших страниц равно 314 – 142 = 172.

Ответ: 172 страницы.

Задача 37.

Решение:

(из нечетного получается на следующем шаге 2 четных, 2 нечетных, а из четного – 3 четных и 1 нечетное)

имеем	1 (нечет)				
1 шаг	3 (1+2) нечет	4 (1+3) чет	2 (1·2) чет	3 (1·3) нечет	2 четных 2 нечетных
2 шаг	5 6 6 9	6 7 8 12	4 5 4 6	5 6 6 9	10 четных 6 нечетных
3 шаг	Каждое число порождает 4 по условию На каждом шаге: Из нечетного получаем 2 четных и 2 нечетных				42 четных 22

Из четного получаем 3 четных и 1 нечетных нечетных

Ответ: в результате 42 раза получились четные числа.

Задача 38.

Решение.

Если среда пришлась на четное число, то следующая придется на нечетное, поскольку неделя состоит из семи дней. Таким образом, для того, чтобы три среды выпали на четные числа, всего их должно быть в этом месяце пять. При этом первая среда должна приходиться на четное число. Если первая среда придется на четвертое число, то пятая должна быть тридцать второго числа, а в месяце не более тридцати одного дня. Тем более первая среда не может быть позже четвертого. Следовательно, первой средой будет второе число месяца. Тогда месяц начнется со вторника, первое воскресенье будет шестого, а второе воскресенье – тринадцатого.

Литература и интернет - источники

1. С.А.Генкин, И.В.Итенберг, Д.В.Фомин. Математический кружок. Четность. Четность и нечетность
2. http://matuha.ru/olimpiadnie-zadaniya/olimpiadnie-zadachi-na-ch-tnost-chetnost-i-nechetnost--otveti
3. http://www.zaba.ru/cgi-bin/tasks.cgi?tour=books.mk1.chetnost.chetnechet

Глава.

олимпиадные задания

А. В. Фарков

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ В ШКОЛЕ

5 класс

Вариант 1

1. Расшифруйте два ребуса, в которых одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным буквам — разные цифры в обоих примерах. (3 б.)

$$\begin{array}{r} +\text{АБВ} \\ \text{ВВ} \\ \hline \text{ААБ} \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\text{АБВ} \\ \text{ВВ} \\ \hline \text{АБВ} \\ +\text{АБВ}\phantom{\text{В}} \\ \hline \text{АГАВ} \end{array}$$

2. Летели утки: одна впереди и две позади, одна позади и две впереди, одна между двумя и три в ряд. Сколько всего летело уток? (3 б.)

3. Докажите, что из трех целых чисел всегда можно найти два, сумма которых делится на два. (4 б.)

4. Найдите наибольшее целое число, дающее при делении на 13 с остатком частное 17. (5 б.)

5. Определить расстояние АВ и расстояние между точками О и М, если М - середина отрезка АВ, ОА = a, ОВ = b. (6 б.)

6. Из числа 12345678910111213...5657585960 вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим. (8 б.)

Вариант 2

1. Вычеркните в числе 4000538 пять цифр так, чтобы оставшееся число стало наибольшим.

2. Для того чтобы разрезать металлическую балку на две части, нужно уплатить за работу 5 рублей. Сколько будет стоить работа, если балку нужно разрезать на 10 частей?

3. Парусник отправляется в плавание в понедельник в полдень. Плавание будет продолжаться 100 часов. Назовите день и час его возвращения в порт.

4. Разбейте циферблат часов (см. рис. 1) с помощью отрезков на три части таким образом, чтобы сумма чисел в каждой из этих частей была одной и той же.

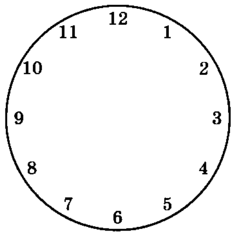


Рисунок 1

5. На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя, Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

6. Соедините точки А и В (см. рис. 2) линией длиной 19 см так, чтобы она прошла через все точки, изображенные на рисунке (расстояние между двумя соседними точками, расположенными горизонтально или вертикально, равно 1 см).

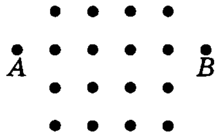


Рисунок 2

Вариант 3

1. Сколько раз к наибольшему однозначному числу надо прибавить наибольшее двузначное число, чтобы получить наибольшее трехзначное число.

2. Расставьте скобки в записи 7-9 + 12: 3-2 так, чтобы значение полученного выражения было равно а) 23; б) 75.

3. Если Сережа поедет в школу автобусом, а обратно пойдет пешком, то он затратит на весь путь 1 ч 30 мин. Если же в оба конца он поедет автобусом, то затратит всего 30 мин. Сколько времени потратит Сережа на дорогу, если он пойдет пешком и в школу и обратно?

4. Школьный драмкружок, готовясь к постановке отрывка из сказки А. С. Пушкина о царе Салтане, решил распределить роли между участниками.

— Я буду Черномором, — сказал Юра.

— Нет, Черномором буду я, — заявил Коля.

— Ладно, — уступил ему Юра, — я могу сыграть Гвидона.

— Ну, я могу стать Салтаном, — тоже проявил уступчивость Коля.

— Я же согласен быть только Гвидоном! — произнес Миша.

Желания мальчиков были удовлетворены. Как распределились роли?

5. У Ивана имеется деревянный параллелепипед с измерениями 6 см, 12 см, 18 см. Он распиливает его на кубики с ребром 1 см и ставит их один на другой. Сможет ли Иван достроить вышку из этих кубиков, если даже он заберется на трехметровую лестницу.

Вариант 4

1. Запишите наибольшее и наименьшее семизначные числа.

2. У щенят и утят вместе 44 ноги и 17 голов. Сколько щенят и сколько утят?

3. Если школьник купит 11 тетрадей, то у него останется 5 рублей. А на 15 тетрадей у него не хватает 7 рублей. Сколько денег у школьника?

4. Как, имея два сосуда вместимостью 5 л и 7 л, налить из водопроводного крана 6 л?

5. Как разрезать прямоугольник, длина которого 16 см, а ширина 9 см, на две равные части, из которых можно составить квадрат?

Вариант 5

1. Вычислите: 101101 • 999-101 • 999 999.

2. Разместите на трех грузовиках 7 полных бочек, 7 бочек, наполненных на половину, и 7 пустых бочек так, чтобы на всех грузовиках был одинаковый по массе груз.

3. На школьной викторине участникам предложили 20 вопросов. За правильный ответ ученику ставилось 12 очков, а за неправильный списывали 10 очков. Сколько правильных ответов дал один из учеников, если он ответил на все вопросы и набрал 86 очков?

4. Сколько прямоугольников изображено на рис. 3? Площадь каждого квадрата равна 1 кв. ед.

5. Сколько нулей стоит в конце произведения всех

натуральных чисел от 10 до 25?

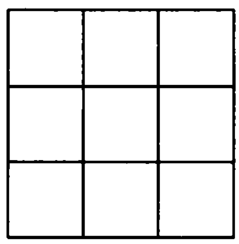


Рисунок 3

Вариант 6

1. Решите уравнение: 2 + 180 : (x -11) = 22.

2. Внучке столько месяцев, сколько лет дедушке. Вместе им 91 год. Сколько лет дедушке и сколько лет внучке?

3. В трех мешках находятся крупа, вермишель и сахар. На одном мешке написано «крупа», на другом — «вермишель», на третьем — «крупа или сахар». В каком мешке что находится, если содержимое каждого из них не соответствует записи?

4. Можно ли треугольник разрезать так, чтобы получилось три четырехугольника? (Если «да», то выполните рисунок.)

5. Даны числа от 1 до 9. Расставьте их в кружки так, чтобы сумма трех чисел вдоль каждой линии (см. рис. 4) была равна 15. Какое число должно быть в центре?

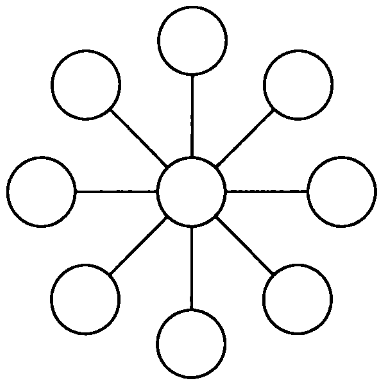


Рисунок 4

Вариант 7

1. В шести кружках, расположенных в форме равностороннего треугольника (см. рис. 5), расставьте числа 31, 32, 33, 34, 35, 36 так, чтобы сумма чисел на всех трех сторонах треугольника была одинаковой и равнялась 100.

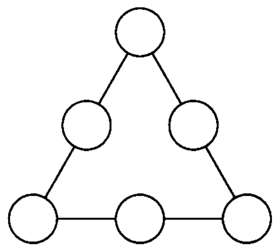


Рисунок 5

2. Чашка и блюдце вместе стоят 25 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей. Найдите цену чашки и цену блюдца.

3. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30; а затем он сосчитал 53 количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

4. Разделите данную фигуру (см. рис. 6) на четыре равные фигуры.

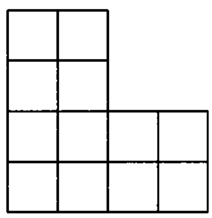


Рисунок 6

5. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном — просо, в другом — мак, а в третьем — еще не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них приклеила таблички: «Мак», «Просо», «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно

поменяла местами таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная запись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зернышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

6. Из 9 монет — одна фальшивая, она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая монета фальшивая?

7. Найдите сумму: 1 + 2 + 3 + ... + 111.

Вариант 8

1. Найдите среди чисел вида 3а + 1 первые три числа, которые кратны 5.

2. Малыш может съесть 600 г варенья за 6 мин, а Карлсон — в 2 раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?

3. Угадайте корни уравнения: 12 : х = 7-х.

4. Квадрат разрезали по ломаной линии, состоящей из трех равных отрезков. Начало разреза в точке А (см. рис. 7). Получили две равные фигуры. Как это сделали?

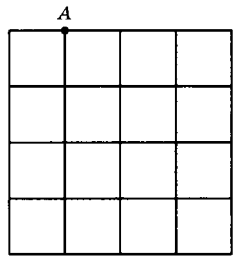


Рисунок 7

5. Как с помощью семилитрового ведра и трехлитровой банки налить в кастрюлю ровно 5 литров воды?

6. Догадайся, какие цифры надо поставить вместо звездочек?

$$\begin{array}{r} \times\ {*}{*}5 \\ 4{*} \\ \hline 3{*}{*} \\ +\ {*}2{*}{*} \\ \hline 1{*}{*}{*}{*} \end{array}$$

7. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. В какой сосуд налита каждая из жидкостей?

Вариант 9

1. На прямой линии посажено 10 кустов так, что расстояние между любыми соседними кустами одно и то же. Найдите это расстояние, если расстояние между крайними кустами 90 дм.

2. Выразите x из формулы a = (x + 8): 9.

3. Когда велосипедист проехал $\frac{2}{3}$ пути, лопнула шина. На остальной путь пешком он затратил вдвое больше времени, чем на велосипедную езду. Во сколько раз велосипедист ехал быстрее, чем шел?

4. В записи 1*2*3*4*5 замените «*» знаками действий и расставьте скобки так, чтобы получилось выражение, значение которого равно 100.

5. Было 9 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на три части. Всего стало 15 листов. Сколько листов бумаги разрезали?

6. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько страниц в этой книге?

Вариант 10

1. Угадайте корень уравнения y • y + 5 = 21 и выполните проверку.

2. Попрыгунья Стрекоза половину времени каждых суток красного лета спала, третью часть времени каждых суток танцевала, шестую часть — пела. Остальное время она решила посвятить подготовке к зиме. Сколько часов в сутки Стрекоза готовилась к зиме?

3. Найдите значение выражения: 26·25-25·24 + 24·23-23·22+ 22·21-21·20 +20·19-19 18+18·17-17·16 + 16·15-15·14.

4. Восстановите запись:

$$\begin{array}{r}
\times\ {*}2{*}3 \\
{*}{*} \\
\hline
+\ {*}{*}{*}87 \\
{*}{*}{*}{*}{*} \\
\hline
2{*}004{*}
\end{array}$$

5. В семье четверо детей, им 5, 8, 13 и 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера, Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на 3?

6. Приехало 100 туристов. Из них 10 человек не знали ни немецкого, ни французского языка, 75 знали немецкий язык и 83 знали французский. Сколько туристов знали французский и немецкий языки?

Вариант 11

1. Решите уравнение $3 + \frac{210}{x-3} = 33$.

2. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рис. 8.

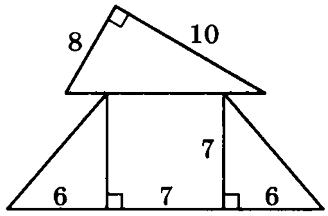


Рисунок 8

3. Из 18 одинаковых кубиков сложили прямоугольный параллелепипед высотой в три кубика. Найдите площадь поверхности параллелепипеда, если площадь поверхности одного кубика равна 19 см^2.

4. Сумма уменьшаемого, вычитаемого и разности равна 26. Найдите уменьшаемое.

Вариант 12

1. 3 ученика делают 3 самолетика за 3 минуты. Сколько учеников сделают 9 самолетиков за 9 минут?

2. Рыбаки поймали 19 рыбин массой 100 г, 200 г,..., 1900 г. Можно ли весь улов поделить поровну между 10 рыбаками? Если можно, то как? Если нет, то почему?

3. Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Когда одного игрока удалили с поля, средний возраст оставшихся игроков стал 21 год. Сколько лет удаленному игроку?

4. Цена билета на стадион была 150 руб. После снижения цены билета количество посетителей увеличилось на 50%, а сбор увеличился на 25%. На сколько снизили цену билета?

5. Напишите в строку пять чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была отрицательной, а сумма всех чисел положительной.

Вариант 13

1. Внуку столько же месяцев, сколько лет бабушке. Бабушке с внуком вместе 52 года. Сколько лет бабушке и сколько лет внуку?

2. Петя провел три прямые линии и отметил на них 6 точек. Оказалось, что на каждой прямой он отметил 3 точки. Покажите, как он это сделал.

3. Три охотника варили кашу. Один положил 2 кружки крупы, второй — 1 кружку, а у третьего крупы не было. Кашу же они съели все поровну. Третий охотник и говорит: «Спасибо за кашу! В благодарность я даю вам 5 патронов, но как их поделить в соответствии с вашим вкладом в мою порцию каши?»

4. Четверо девочек выбирали водящую с помощью считалки. Тот, на кого падало последнее слово, выходил из круга, и счет повторялся вновь. Считающая девочка каждый круг начинала с себя и в результате стала водящей, причем счет каждый раз кончался перед ней. Какое наименьшее число слов могло быть в считалке?

6 класс

Вариант 1

1. Решите уравнение: 5(х + 2,6) = 3(2* + 5,2). (3 б.)

2. Дан прямоугольник ABCD, где A(-4;-1), B(3;-1), C(3; 5), D(-4; 5). Задайте с помощью двойного неравенства:

а) множество абсцисс всех точек прямоугольника;

б) множество ординат всех точек прямоугольника. (4 б.)

3. В записи 52*2* замените звездочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 36. Укажите все возможные решения. (5 б.)

4. Сколько воды надо добавить к 600 г жидкости, содержащей 40% соли, чтобы получился 12%-ый раствор этой соли? (8 6.)

5. Ученик вышел из дома в школу в 8 ч утра. В какое время он придет в школу, если до нее 1 км? (9 б.)

6. Олег, Игорь и Аня учатся в 6 классе. Среди них есть лучший математик, лучший шахматист и лучший художник. Известно, что:

а) лучший художник не нарисовал своего портрета, но нарисовал портрет Игоря;

б) Аня никогда не проигрывала мальчикам в шахматы.

Кто в классе лучший математик, лучший шахматист и

лучший художник? (10 б.)

Вариант 2

1. Поставьте вместо звездочек цифры:

$$\begin{array}{r} 59{,}27 \\ +\;**{,}45 \\ 78{,}*3 \\ \hline 182{,}1* \end{array}$$

2. Выразите число 16 с помощью четырех пятерок, соединяя их знаками действий.

3. Найдите два корня уравнения: |-0,63|: |x| = |-0,9|.

4. Разместите восемь козлят и девять гусей в пяти хлевах так, чтобы в каждом хлеве были и козлята и гуси, а число их ног равнялось 10.

5. На столе стоят три одинаковых ящика, в одном находятся 2 черных шарика, в другом — 1 черный и 1 белый шарик, в третьем — 2 белых шарика. На ящиках написано: «2 белых», «2 черных», «черный и белый». При этом известно, что ни

одна из надписей не соответствует действительности. Как, вынув только 1 шарик, определить правильное расположение надписей?

Вариант 3

1. Решите уравнение: 0,5 • (x + 3) = $\frac{4}{6}$ • (11-x).

2. Найдите все дроби со знаменателем 15, которые больше $\frac{8}{9}$ и меньше 1.

3. Переложите одну из семи спичек, изображающих число $\frac{7}{10}$, записанное римскими цифрами (т. е. $\frac{VII}{X}$) так, чтобы получившаяся дробь равнялась $\frac{2}{3}$.

4. Возраст старика Хоттабыча записывается числом с различными цифрами. Об этом числе известно следующее:

• если первую и последнюю цифру зачеркнуть, то получится двузначное число, которое при сумме цифр, равной 13, является наибольшим;

• первая цифра больше последней в 4 раза. Сколько лет старику Хоттабычу?

5. Древнегреческая задача.

— Скажи мне, знаменитый Пифагор, сколько учеников посещают твою школу и слушают твои беседы?

— Вот сколько, — ответил Пифагор, — половина изучает математику, четверть — природу, седьмая часть проводит время в размышлении и, кроме того, есть еще три женщины. Сколько всего учеников посещают школу Пифагора?

Вариант 4

1. Решите уравнение: $-\frac{7}{9} : 3,1 = x : 9,3$.

2. Вместо звездочек расставьте пропущенные цифры:

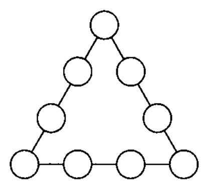
```
   785
 × ***
   ---
   ***
+ 1***
  ***
  -----
  *****
```

3. Некоторый товар стоил 500 рублей. Затем цену на него увеличили на 10%, а затем уменьшили на 10%. Какой стала цена в итоге?

4. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре так, чтобы полученное число делилось на 15.

5. В летний лагерь приехали отдыхать три друга: Миша, Володя и Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из следующих фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша — не Герасимов. Отец Володи — инженер. Володя учится в 6 классе. Герасимов учится в 5 классе. Отец Иванова — учитель. Какая фамилия у каждого из трех друзей?

Вариант 5



1. Даны числа 1, 2, 3, 4, 5, б, 7, 8, 9. Расставьте их так, чтобы сумма их на каждой стороне треугольника (см. рис. 9) была равна 20.

2. Найдите наиболее рациональным способом значение выражения: $25-\frac{3}{7} \cdot 7 + (12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}) \cdot 25 + 125 \cdot 357 \cdot 0{,}008$.

Рисунок 9

3. Решите уравнение: Iх—4I = 3.

4. Школьник прочитал книгу за три дня. В первый день он прочитал 0,2 всей книги и еще 16 страниц, во второй день — 0,3 остатка и еще 20 страниц. В третий день — 0,75 остатка и последние 30 страниц книги. Сколько страниц в книге?

5. Инопланетяне сообщили жителям Земли, что в системе их звезды три планеты А, Б, В. Они живут на второй планете. Далее передача сообщения ухудшилась из-за помех, но было принято еще два сообщения, которые, как установили ученые, оказались оба ложными:

а) А — не третья планета от звезды;

б) Б — вторая планета.

Какими планетами от звезды являются А, Б, В?

Вариант 6

1. Выполните действия: 15,81 : (24-23,66)-18 : 37,5.

2. Решите уравнение: |х—3| = 7.

3. Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

$$\begin{array}{r} +\text{УДАР} \\ \text{УДАР} \\ \hline \text{ДРАМА} \end{array}$$

4. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Докажите, что это число кратно 7, 11, 13.

5. В школьной математической олимпиаде принимали участие 9 учеников шестого класса. За каждую решенную задачу ученик получал 2 очка, а за каждую нерешенную задачу с него списывалось 1 очко. Всего было предложено 10 задач. Докажите, что среди участников олимпиады из шестого класса было,

по крайней мере, два ученика, набравших одинаковое число очков. (Считается, что ученик, набравший больше штрафных очков, чем зачетных, набрал ноль очков.)

Вариант 7

1. Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

$$\begin{array}{r} \text{КОКА} \\ +\underline{\text{КОЛА}} \\ \text{ВОДА} \end{array}$$

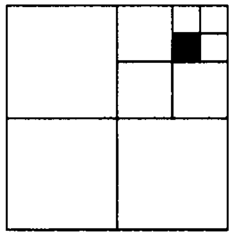


Рисунок 10

2. Какая часть квадрата (см. рис. 10) закрашена?

3. Один купец прошел через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть (с того, что осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что у него было); и когда он прибыл домой, у него осталось имущества на 1000 денежных единиц. Узнайте, какова была стоимость имущества у купца?

4. Расставьте числа $\frac{9}{10}; \frac{10}{11}; \frac{11}{12}; \frac{12}{13}$ в порядке убывания.

5. Ни у кого из тысячи пиратов

Не наберется тысячи дукатов.

Но даже самый маленький пират

Имеет все же хоть один дукат.

Так можно ли сказать о тех пиратах,

Что среди них — безусых и усатых,

Косматых, безбородых, бородатых —

Есть двое одинаково богатых?

6. По кругу написано 2009 натуральных чисел. Докажите, что найдутся два соседних числа, сумма которых четна.

Вариант 8

1. Масса бидона с молоком 32 кг, без молока — 2 кг. Какова масса бидона, заполненного молоком наполовину?

2. Расшифруйте запись. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры.

```
        ×МИНУС
         МИНУС
         ─────
          ****С
   +    *****У
        ****Н
       ****И
      МИНУС
      ─────────
      *********
```

3. Три подруги вышли в белом, синем, зеленом платьях и туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и туфель совпадает. Ни платье, ни туфли Вали не были белыми. Наташа была в зеленых туфлях. Определить цвет платья и туфель каждой подруги.

4. В классе 35 учеников. Из них: 20 школьников занимаются в математическом кружке, 11 — в экологическом, 10 ребят не посещают эти кружки. Сколько экологов увлекается математикой?

5. В школе 33 класса, 1150 учеников. Найдется ли класс, в котором меньше 35 учеников?

Вариант 9

1. Первый раз Дима на рыбалку поехал на велосипеде. Рыбы поймал много, поэтому обратно шел пешком. На весь путь он затратил 40 минут. Во второй раз он до реки туда и обратно ехал на велосипеде и затратил 20 минут. Сколько времени Диме потребуется, чтобы пройти путь в оба конца пешком?

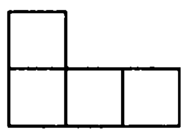


Рисунок 11

2. Разрежьте клетчатый прямоугольник размером 5 х 8 на фигурки из четырех клеток вида (рис. 11).

3. На окраску куба размерами 2х2х2 требуется 2 грамма краски. Сколько краски потребуется на покраску куба размером 6х6х6?

4. Маша купила в магазине тетради по 13 рублей и блокноты по 15 рублей. За всю покупку она заплатила ровно 239 рублей. Сколько тетрадей и блокнотов купила Маша?

Вариант 10

1. Решите уравнение: $\frac{12,3}{2,324} = \frac{x-4}{46,48}$.

2. Произведение двух взаимно простых чисел равно 3232. Чему равно наименьшее общее кратное этих чисел? Найдите эти числа.

3. Сравните числа х и у, если 13,5% числа х равны 12,5% числа у.

4. Прямоугольник разделен двумя отрезками на четыре прямоугольника, площади трех из которых 2 см2, 4 см2, 6 см2 (рис. 12). Найдите площадь прямоугольника.

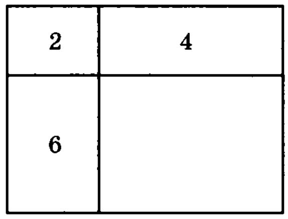


Рисунок 12

Вариант 11

1. В стаде 8 овец. Первая съест копну сена за 1 день, вторая — за 2 дня, третья — за 3 дня,..., восьмая — за 8 дней. Кто быстрее съест копну сена: две первые овцы или все остальные вместе?

2. В начале забега на 1000 м вперед вырвался Андрей, вторым шел Борис, а третьим — Виктор. За время бега Андрей и Борис менялись местами 6 раз, Борис и Виктор — 5 раз, Андрей и Виктор — 4 раза. В каком порядке прибежали спортсмены? Почему?

3. В классе девочек, которым нравится математика, столько же, сколько и мальчиков, которым не нравится математика. Кого в классе больше: учеников, которым нравится математика или мальчиков?

4. Придумайте натуральное число, которое делится на 2004 и сумма его цифр также делится на 2004.

Школьная олимпиада г. Кострома 2009г.

5 класс

Задание №1

В записи 999999999 поставьте между некоторыми цифрами знаки сложения и деления, чтобы сумма оказалась равной 2009.

Задание №2

Если бы пятиклассница Маша купила 11 тетрадей, то у неё осталось бы 5 рублей. А на 15 тетрадей у неё не хватило 7 рублей. Сколько денег было у Маши?

Задание №3

Назовём натуральное число «симпатичным», если в его записи встречаются только нечётные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

Задание №4

Двенадцать кузнецов должны подковать 18 лошадей. Какое наименьшее время они затратят на работу, если каждый кузнец тратит на одну подкову 5 минут?

Задание №5

В квадрате 7×7 закрасьте некоторые клетки, чтобы в каждом столбце и в каждой строке оказалось ровно по три закрашенные клетки.

6 класс

Задание №1

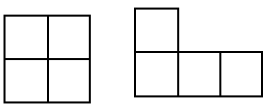
В классе работает три секции. В лыжной секции занимаются 19 человек, в секции плавания – 13 человек, а в велосипедной секции – 12 человек. Сколько школьников занимается велосипедом и плаванием, если каждый спортсмен посещает две секции?

Задание №2

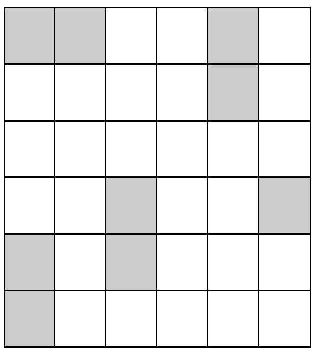
У Пети 44 монеты и 10 карманов. Сможет ли он разложить все свои монеты по карманам так, чтобы количество монет в каждом кармане было бы различным (в частности оно может быть равно нулю)?

Задание №3

Квадрат 6 × 6 разрезать на фигуры:



так, чтобы в каждой фигуре была ровно одна закрашенная клетка.



Задание №4

У Саши на дне рождения было пятеро друзей. Первому он отрезал $\frac{1}{6}$1 часть пирога, второму $\frac{1}{5}$ остатка, третьему $\frac{1}{4}$ того, что осталось, четвертому $\frac{1}{3}$ нового остатка. Последний кусок Саша разделил пополам с пятым другом. Кому достался самый большой кусок?

Задание №5

В бочку запустили 40 крыс, которые постепенно поедают друг друга. Крыса считается сытой, если она съела 4 крысы (сытых или голодных). Докажите, что как бы крысы не поедали друг друга, 10 крыс никогда не смогут насытиться.

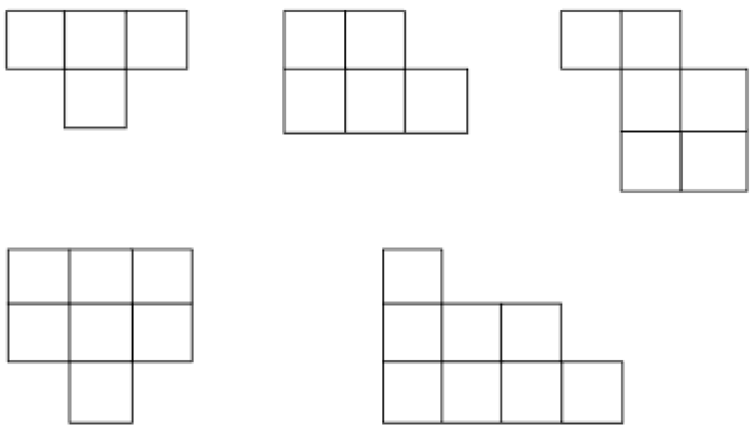
Школьная олимпиада г. Кострома 2011г.

5 класс

1. В двузначном числе зачеркнули цифру, и оно уменьшилось в 46 раз. Определите, какое это было число и какую цифру зачеркнули?

2. Кот Матроскин принёс с базара несколько яблок и хвастается Шарику: «Я купил в четыре раза больше яблок, чем ты вчера, но заплатил за каждое яблоко вдвое меньше». Сколько денег заплатил Матроскин, если Шарик истратил на яблоки 75 рублей?

3. Сложить квадрат, используя четыре из пяти изображённых фигурок. Какая фигурка останется лишней?



4.В семье четверо детей. Им исполнилось **5**, **8**, **13** и **15** лет. Детей зовут Аня, Миша, Вера и Женя. Одна из девочек ходит в детский сад. Аня старше Миши. Сумма возрастов Ани и Жени делится на **3**. Кто Женя: мальчик или девочка?

5. У пяти пиратов было по 16 монет. Потом первый отдал половину своих монет второму, второй – половину от имеющихся теперь монет третьему, третий половину четвертому, а четвертый – половину пятому. На сколько монет у пятого пирата стало больше, чем у первого?

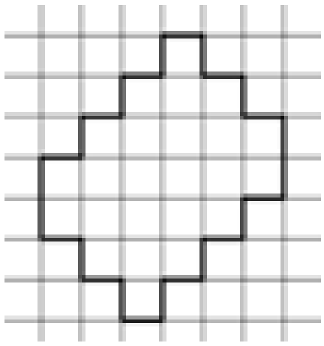
6 класс

1. Замените звёздочки цифрами, чтобы получилось верное равенство $\frac{5}{*} - \frac{*}{3} = \frac{1}{6}$

2. Доктор Айболит раздал пяти заболевшим зверям 2011 чудодейственную таблетку. Носорог получил на одну больше, чем крокодил, бегемот на одну больше, чем носорог, а слон – на одну больше, чем бегемот. Удаву досталось столько же таблеток, сколько и крокодилу. Сколько таблеток придётся съесть слону?

3. На новогодний праздник Тянитолкай получил подарок от доктора Айболита. Собака Авва считает, что ему подарили красный бант, попугай Карудо уверен, что это синий бант, а сова Бумба говорит, что подарен белый воздушный шар. Какой подарок получил Тянитолкай, если известно, что каждый из них угадал либо цвет подарка, либо его вид? Ответ обоснуйте.

4. Требуется разрезать по клеточкам, изображенную на рисунке фигуру на несколько равных частей. Сколько частей может получится ? Найдите все возможные ответы и для каждого из них укажите способ разрезания. (Части считаются равными, если они совпадают при наложении.)



5. Среди 101 монеты есть одна фальшивая, которая по весу отличается от настоящей. Но на этот раз неизвестно, в какую сторону. За два взвешивания определите, легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. (Саму монету определять не нужно.)

Творческая лаборатория «Дважды Два»:
письменный тур олимпиады пятиклассников 2009

http://mathbaby.ru/olympiads/5th/2009/1st-tour

Часть А

1. На полке в один ряд стоят книги. Энциклопедия стоит пятой слева и семнадцатой справа. Сколько книг на полке?

2. 5 окуней легче 6-ти карасей, но тяжелее 10 лещей. Что тяжелее — 2 карася или 3 леща?

3. Лиса, Волк и Заяц сыграли в домино. Заяц сказал: «Волк глупее лисы». Волк: «Лиса выиграла». Известно, что один из зверей — самый глупый — соврал. Выиграл же самый умный зверь. Кто это был?

4. Костя мечтает: «Если бы у меня было конфет в три раза больше, чем сейчас, то у меня было бы на 12 конфет больше». Сколько конфет у Кости?

5. Отличница Настя составила огромное число, выписав подряд натуральные числа от 1 до 500: 123456789101112...498499500. Двоечник Миша стер у этого числа первые 200 цифр. С какой цифры начинается оставшееся число?

6. Лида вяжет шарф длиной 2м. Каждое утро она садится за вязание и вяжет 30см. Каждую ночь котенок Непоседа распускает 20см связанного шарфа. Лида начала вязать 1 февраля. Какого числа шарф будет связан?

7. Чему равна сумма 123456789 + 234567891 + 345678912 + ... +912345678 ?

8. В одной сказочной стране Лилипуты и Гуливеры построили рядом многоэтажные дома, которые соединены горизонтальным переходом с 5-го этажа дома Гуливеров на 25-ый этаж дома Лилипутов.

(а) Пол какого этажа Лилипутов напротив пола 10 этажа Гуливеров?

(б) Во сколько раз этаж Гуливеров выше этажа Лилипутов?

9. Встретились три мальчика: Вася, Лёша и Миша. Вася сказал: «Мы все лжецы». Лёша сказал: «Мы все всегда говорим правду». А Миша промолчал. Сколько лжецов среди ребят?

10. В городе Урюпинске на главной площади города устроили каток странной формы (см.план справа). Какова площадь катка, если площадь одной клеточки на плане 1м^2 ?

11. Первого сентября в школе начались занятия кружков пения, рисования, по математике и по физике. Кружок пения проходит через два дня на третий, рисования — каждый 4-й день, кружок по математике — каждый 5-й день и по физике- каждый 6-й день. Кружки ведутся и в выходные, и в каникулы.

(а) Сколько было осенью дней, когда собирались все четыре кружка?

(б) Сколько занятий кружка по математике было осенью?

Часть Б

1. В зимней математической школе начальник смены повел школьников кататься на лыжах. Начало и конец маршрута — в точке С (см.рис.). Могли ли школьники пройти 10 километров по этому маршруту?

2. Аня, Саша и Витя и Настя решали контрольную, на которой задали 9 задач. Могло ли быть так, что Аня списала семь задач у Саши, Саша списал семь задач у Вити, Витя списал семь задач у Насти, а Настя списала семь задач у Ани?

3. Юля, Семен, Василиса, Илларион и Татьяна Петровна ели конфеты (причем, не деля их на части). Когда все конфеты кончились, их спросили: «Кто сколько съел конфет?» На что они ответили:

Юля: «Я и Василиса съели 97 конфеты»;

Семен: «Я и Илларион съели 234 конфеты»;

Василиса: «Я, Семен и Татьяна Петровна съели 153 конфет»;

Илларион: «Я, Татьяна Петровна и Юля съели 277 конфет».

После этого Татьяна Петровна сказала, что так быть не могло. Почему она пришла к такому выводу?

4. У Буратино есть 6 монет: две золотые, две серебряные и две медные. В каждой паре одна монета настоящая, а другая фальшивая. Известно, что все настоящие монеты весят одинаково и все фальшивые тоже весят одинаково. Фальшивые легче настоящих. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь найти все настоящие монеты?

5. Клетки тетрадного листа раскрашены в 8 цветов. Докажите, что найдется

фигура вида , внутри которой есть две клетки одного цвета.

Областной этап олимпиады по математике

учащихся общеобразовательных учреждений (2010г.)

5 класс

(Время работы над заданиями – 1 час)

1. Восстановите пример
   ОГОГО+УГУГУ=УГУГУГ.

Одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры.

2. Фирма «Рога и копыта» изготавливает деревянные кубики со стороной 20 см. Материалы для изготовления одного кубика стоят 40 копеек (10 копеек — дерево, 30 копеек — лак для покрытия всей поверхности). Во сколько раз дороже обойдутся материалы для производства одного кубика со стороной 40 см?

3. Гриб называется **плохим**, если в нем не менее 10 червей. В лукошке 90 плохих и 10 хороших грибов. Могут ли все грибы стать хорошими после того, как некоторые черви переползут из плохих грибов в хорошие?

4. Поросенок Наф-Наф придумал, как сложить параллелепипед из одинаковых кубиков и оклеить его тремя квадратами без щелей и наложений. Сделайте это и вы.

5. Рассеянный математик, переселившийся в новый район, забыл номер своей квартиры. Он лишь помнил, что номер двузначный, является разностью квадратов двух чисел, меньшее из которых равно цифре десятков и вдвое больше числа единиц номера квартиры. Можно ли по этим данным восстановить номер квартиры?

6 класс

(Время работы над заданиями – 1,5 часа)

1. Малыш и Карлсон идут на обед с плюшками к Фрекен Бок.

Шаги Карлсона на 20% короче, чем шаги Малыша, но зато он за то же время делает на 20% больше шагов, чем Малыш. Кто ходит быстрее?

2. Из клетчатого квадрата размером 9×9 клеточек вырезали центральную клетку. Как разрезать оставшуюся часть квадрата на 40 одинаковых треугольников?

3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на квадрат какого-нибудь натурального числа, отличного от единицы?

4. В Стране Чудес состоялись рыцарские состязания на звание Бравного Воина. Победитель получал из рук Алисы приз – Вострый меч. Всего состоялось 105 поединков, причем в них каждый участник встретился с каждым другим ровно

один раз. Победил Шляпник. Сколько рыцарей, кроме него, участвовали в состязаниях?

5. Кролик, готовясь к приходу гостей, повесил в трёх углах своей многоугольной норы по лампочке. Пришедшие к нему Винни-Пух и Пятачок увидели, что не все горшочки с мёдом освещены. Когда они полезли за мёдом, две лампочки разбились. Кролик перевесил оставшуюся лампочку в некоторый угол так, что вся нора оказалась освещена. Могло ли такое быть? (Если да, нарисуйте пример, если нет, обоснуйте ответ.)

Межрегиональная заочная математическая олимпиада 2008/09 учебного года (Всероссийской школы математики и физики «Авангард»).

6 класс

1. Разрежьте произвольный треугольник на четыре одинаковых треугольника.

2. Восстановите пропущенные цифры:

```
 ×  941
    ***
  -------
   **6*
 ****
----------
 5**3**
```

3. На сколько частей делят пространство продолженные плоскости граней куба?

4. В чемпионате страны СооБразилии по пляжному футболу, проходящем по круговой системе в два круга, было сыграно 9702 матча. Сколько команд приняло участие в чемпионате?

5. Среди 2012 внешне неразличимых шариков половина имеет один вес, а вторая половина — другой. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы количество шариков в кучках было одинаковым, а массы кучек — разными. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

5 класс

Вариант 1

1. $\begin{array}{r} +\,321 \\ \underline{11} \\ 332 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{r} \times\,321 \\ \underline{11} \\ +\,321 \\ \underline{321} \\ 3531 \end{array}$ $\qquad$ $\begin{array}{l} А = 3 \\ Б = 2 \\ В = 1 \\ Г = 5 \end{array}$

2.3.

3. Из трех чисел как минимум два являются одинаковой четности, значит, их сумма делится на 2.

4. a = 13 17 +12 = 233.

5. Точки A и B могут лежать по одну или по разные стороны от точки O. Рассмотрим первый случай: Аи В лежат по одну сторону от точки О (см. рис. 1).

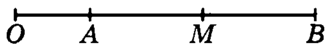


рисунок 1

1) a < b. Тогда AB = OB-OA = b-a, OM = OB-MB = b - $\frac{1}{2}$(b-a)= $\frac{1}{2}$(a + b).

2) a > b, тогда A и B меняются местами и AB = OA—OB = a - b, OM = OA-MA = a - $\frac{1}{2}$(a-b) - $\frac{1}{2}$a + $\frac{1}{2}$b = $\frac{1}{2}$(a + b).

3) a = b, тогда точки A и B совпадут и OM = OA = a = b.

Рассмотрим второй случай: точки Аи В лежат по разные

стороны от точки О (см. рис. 2).

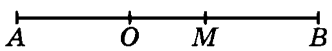


рисунок 2

Рассуждая аналогично, получаем:

OM = $\frac{1}{2}$(b-a), если b > a,

OM = $\frac{1}{2}$(a-b), если b < a,

OM = 0, если b = a.

6. Надо вычеркнуть 100 цифр, причем оставить как можно больше цифр «9» впереди. Тогда до первой цифры «9» вычеркнем 8 цифр, до второй — 19, до третьей — 19, до четвертой — 19, до пятой — 19. Таким образом, мы вычеркнем 19 • 4 + 8 = 84 цифры. Останется вычеркнуть 16 цифр из оставшегося числа 999995051525354555657585960. Вычеркнем теперь 15 цифр, стоящих перед семеркой. Остается число 999997585960. Осталось вычеркнуть одну пятерку. Таким образом, останется число **99999785960.**

Вариант 2

1.58.

2. 45 рублей, так как распилов надо сделать 9.

3. В сутках 24 часа, поэтому 100 ч = 4-24ч+4ч = 4сут+4ч. Поэтому парусник вернется в пятницу в 16 ч.

4. См. рис. 3.

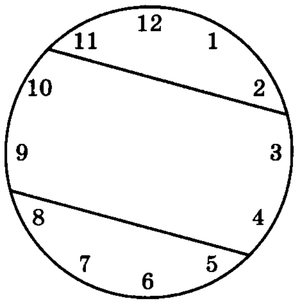


рисунок 13

5. Из второго предложения ясно, что Аня и Валя не в зеленом платье, Надя — не в зеленом и не в голубом. Из третьего предложения следует, что Валя не в розовом и не в белом платье. Тогда Валя будет в голубом платье, а Галя в зеленом. Используя первое предложение, изобразив девочек по кругу, получим, что Галя будет стоять между Валей и Надей. Тогда Аня в белом, а Надя в розовом платье.

Ответ: Валя, Аня и Надя соответственно в голубом, белом и розовом платьях.

6. См. рис. 4.

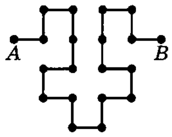


рисунок 4

Вариант 3

1. 9 + n -99 = 999, n = 10.

Ответ: 10 раз.

2. а) (7-9 +12): 3-2 = 23, б) (7-9+12): (3-2) = 75.

3. 30 мин : 2 = 15 мин — Сережа едет в школу автобусом в одну сторону.

1 ч 30 мин—15 мин = 1 ч 15 мин — Сережа идет пешком в одну сторону.

1 ч 15 мин 4-1 ч 15 мин = 2 ч 30 мин — пешком в оба конца.

Ответ: 2 ч 30 мин.

4. Для решения задачи применим графы (см. рис. 5).

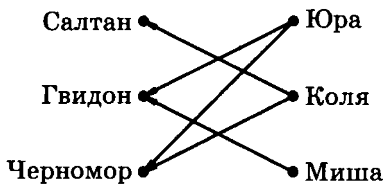


рисунок 5

Так как к Салтану идет лишь одна стрелка, то Коля будет

играть Салтана. Тогда Коля не будет Черномором, а значит, Черномором будет Юра и Миша — Гвидоном.

5. 6-12-18 = 1536 (см3) — объем параллелепипеда. При постановке кубиков объемом 1 см3 друг на друга получим вышку высотой 15 м 36 см. Так как лестница всего длиной 3 м, то рост мальчика с вытянутой рукой должен быть 15 м 36 см—3 м = = 12 м 36 см, чего не может быть.

Вариант 4

1. 9999999 — наибольшее и 1000000 — наименьшее.

2. 5 щенят и 12 утят.

3. 38 рублей.

4. 1) Наполняем семилитровый сосуд, переливаем из него 5 л в пятилитровый, затем 5 л выливаем, а оставшиеся 2 л в семилитровом сосуде выливаем вновь в пятилитровый сосуд.

2) Снова наполняем семилитровый сосуд, отливаем из него 3 л в пятилитровый сосуд. Тогда в семилитровом остается 4 л. Выливаем все из пятилитрового сосуда и выливаем в него 4 л из семилитрового сосуда.

3) Наполняем вновь семилитровый сосуд, отливаем из него 1 л в пятилитровый сосуд. Таким образом, в семилитровом сосуде получаем 6 л.

5. См. рис. 6.

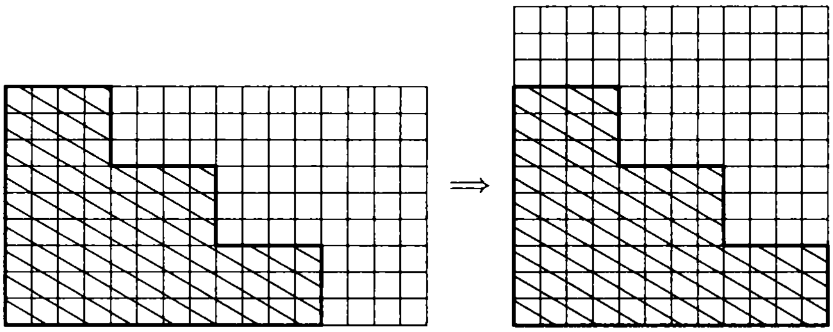


Рисунок 6

Вариант 5

1. 101101 • 999-101 • 999999 = 101 • 1001 • 999-101 • 999 • 1001 = 0.

2. На первый грузовик поместить 3 полных бочки, 1 наполненную наполовину, 3 пустых бочки; на второй грузовик — 3 полных, 1 наполненную наполовину и 3 пустых бочки; на третий грузовик — 1 полную, 5 наполненных наполовину, 1 пустую.

3. Изобразим таблицу набранных очков соответственно при верных 20, 19 и т. д. вопросах:

Верных ответов	20	19	18	17	16	15	14	13	12
Набрано очков	240	218	196	174	152	130	108	86	64

Из таблицы видно, что ученик ответил верно на 13 вопросов. Можно было заметить закономерность, что каждый раз число набранных очков уменьшается на 22.

Ответ: 13.

4. С площадью по 1 кв. ед. будет 9 прямоугольников; 12 — с площадью по 2 кв. ед.; 6 прямоугольников — по 3 кв. ед.; 4 прямоугольника имеют площадь по 4 кв. ед. и 4 — по 6 кв. ед. и 1 — 9 кв. ед.

Ответ: 36 прямоугольников.

5. В произведении содержится 5 «пятерок»: по одной дают разложения 10, 15 и 20 на простые множители; а 25 = 5 х 5. Произведение каждой «пятерки» на четный множитель дает нуль, поэтому произведение оканчивается 5 нулями.

Ответ: 5 нулей.

Вариант 6

1. x = 20.

2. Внучке 7 лет, дедушке 84 года.

3. Используем таблицу.

Содержимое мешка / № мешка	Вермишель	Крупа	Сахар
1		–	+
2	–	+	
3	+	–	–

Так как в первом мешке не крупа, то ставим в соответствующей клетке « — ». Аналогично, во второй строке ставим « — » — против вермишели. Так как в третьем мешке — не крупа и не сахар, то ставим «минусы» в столбцах с надписями «крупа» и «сахар». Тогда из таблицы получаем, что в третьем мешке — вермишель, во втором — крупа (крупы нет в 1 и 3 мешках), значит, сахар — в 1 мешке.

Ответ: В мешке с надписью «крупа» находится сахар, с надписью «вермишель» — крупа, с надписью «крупа или сахар» — вермишель.

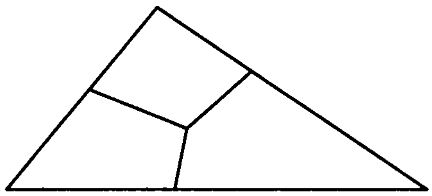


рисунок 7

4. Да, возможный вариант изображен на рис. 7.

5.10 =1 + 9 = 2 + 8 = 3 + 7 = 4 + 6. Разместим «5» в центре.

Тогда возможный вариант может быть такой (см. рис. 8).

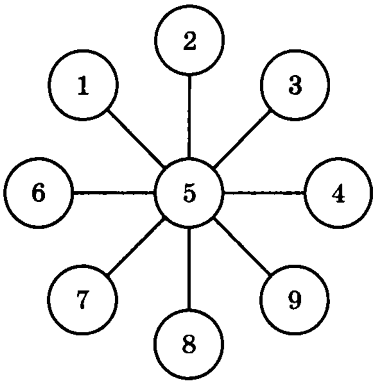


рисунок 8

Вариант 7

1. См. рис. 9.

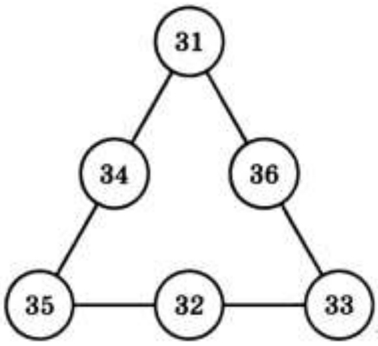


Рисунок 9

2. Одна чашка и одно блюдце вместе стоят 25 рублей, поэтому 4 чашки и 4 блюдца будут стоить 100 рублей. Так как по условию задачи 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей, то одно блюдце стоит 12 рублей. Тогда одна чашка будет стоить (25-12) рублей = 13 рублей.

Ответ: Цена чашки 13 рублей, цена блюдца 12 рублей.

3. Если бы все поросята встали на задние ноги, то на земле оказалось бы 30 • 2 ног. Тогда вверху будет 84-60 = 24 (ноги). Так как каждый поросенок вверх поднял по две ноги, то поросят будет 24 : 2 = 12. Тогда гусей будет 30-12 = 18.

Ответ: 12 поросят и 18 гусей.

4. См. рис. 10.

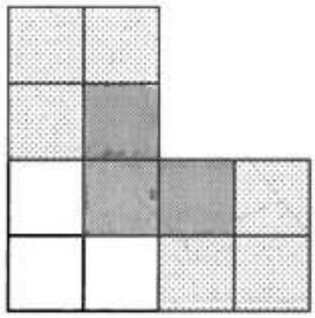


рисунок 140

5. Золушка взяла зернышко из мешка с надписью «смесь»; так как ни одна табличка не соответствовала содержимому мешка, то там был мак или просо. Если взятое Золушкой зернышко — мак, то в мешке с надписью «смесь» — мак, тогда в мешке с надписью «мак» — просо, а в мешке с надписью «просо» — смесь. Аналогично, если взятое зернышко — просо, то в мешке с надписью «смесь» —просо. Тогда в мешке с надписью «мак» — смесь, а в мешке с надписью «просо» — мак.

6. Разделим 9 монет на три кучки по 3 монеты. Произведем первое взвешивание: положим 2 кучки по 3 монеты на каждую чашку весов. Возможны 2 случая:

а) весы находятся в равновесии, тогда на весах находятся настоящие монеты; фальшивая монета находится среди тех монет, которые не взвешивались;

б) равновесия на весах нет, тогда фальшивая монета среди тех монет, где кучка легче.

Определив таким образом кучку с фальшивой монетой, выполним с ней второе взвешивание. Возьмем из трех монет любые две и положим их на чашки весов. Снова возможны 2 случая:

а) весы находятся в равновесии, тогда фальшивая монета оставшаяся;

б) равновесия нет, в этом случае фальшивая монета там, где вес меньше.

7. Напишем искомую сумму дважды:

$S = 1 + 2 + 3 + ... + 109 + 110+111.$

$S = 111 + 110 + 109 + ... + 3 + 2 + 1.$

Сложим почленно:

2S = (1 + 111)+ (2+ 110)+... + (110+ 2)+ (111 + 1) = 112·111.

Тогда S = 112·111 : 2 = 6216.

Вариант 8

1.10,25,40.

2. 600 : 6 = 100 (г) — съест Малыш за 1 минуту,

6:2 = 3 (мин) — за такое время Карлсон съест все варенье,

600 : 3 = 200 (г) — съест варенье Карлсон за 1 минуту,

100 + 200 = 300 (г) — могут съесть вместе варенье Малыш и Карлсон,

600 : 300 = 2 (мин) — за такое время съедят варенье вместе Малыш и Карлсон.

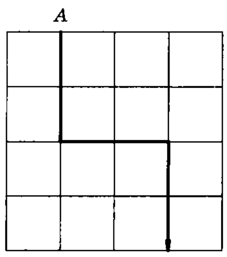


рисунок 15

Ответ: 2 мин.

3. x = 3 или x = 4.

4. См. рис. 11.

5. С помощью трехлитровой банки нальем 6 л воды в ведро. Еще раз нальем 3 л воды в банку и наполним семилитровое ведро доверху. Тогда в банке останется 2 л воды, которую выльем в кастрюлю. Добавим к ним 3 л воды с помощью банки, получим всего 5 л воды. Возможны и другие варианты решения.

6.
$$\begin{array}{r} \times\ 315 \\ 41 \\ \hline 315 \\ +\ 1260 \\ \hline 12915 \end{array}$$

7. Молоко в кувшине, лимонад в бутылке, квас в банке, вода в стакане.

Вариант 9

1. Так как посажено 10 кустов, то промежутков между ними будет 9. Поэтому расстояние между соседними кустами будет 90 : 9 = 10 (дм).

2. x = 9a-8.

3. Велосипедист прошел пешком $\frac{1}{3}$ пути, то есть в 2 раза меньше, чем проехал на велосипеде. Времени же затратил вдвое больше. Поэтому он ехал в 4 раза быстрее, чем шел.

4.1 • (2 + 3) • 4 • 5 = 100.

5. При разрезании каждого листа на 3 части число листов увеличивается на 2. Добавилось: 15—9 = 6 (листов). Значит, 6:2 = 3 (листа) бумаги разрезали.

6. На первые девять страниц потребуется 9 цифр, на каждые следующие 90 страниц надо по 2 цифры на каждую страницу, а значит, надо 2 • 90 цифр. Пусть в книге x страниц, тогда страниц с тремя цифрами будет x-99, а цифр на них —

3 • (x-99). Получаем уравнение: $9 + 2 \cdot 90 + 3(x-99)=1392$.

Решая его, получаем x = 500.

О т в е т: В книге 500 страниц.

Вариант 10

1. y = 4. Проверка: 4-4 + 5 = 21.

2. В сутках 24 ч, из них Стрекоза спала 24 : 2 = 12 (ч), танцевала 24 : 3 = 8 (ч), пела 24 : 6 = 4 (ч). Всего на эти дела она потратила 12 + 8 + 4 = 24 (ч), поэтому на подготовку к зиме времени у нее не осталось.

3. 26·25-25·24+24·23-23·22+22·21-21·20+20·19-19·18+18·17-17·16+16·15-15·14 = 25 • (26-24) + 23 • (24-22) + 21 • (22-20) + 19 • (20-18) + 17 • (18-16) + 15 • (16-14) =

= 2(25 + 23 + 21 +19 + 17 + 15) = 2(40 + 40 + 40) = 2-120 = 240.

4.

$$\begin{array}{r} \times\,7243 \\ 29 \\ \hline 65187 \\ +\,14486 \\ \hline 210047 \end{array}$$

5. Так как девочка ходит в детский сад, то Боре не 5 лет. Так как Аня старше Бори, то Ане 13 или 15 лет. Но сумма лет Ани и Веры делится на 3, поэтому Ане 13 лет, тогда Вере 5 лет. Тогда так как Аня старше Бори, то Боре 8 лет. Гале остается 15 лет.

Ответ: Вере 5 лет, Боре 8 лет, Ане 13 лет, Гале 15 лет.

6. 100-10 = 90 (чел.) — знали немецкий или французский языки;

90-75 = 15 (чел.) — не знали немецкого языка;

90-83 = 7 (чел.) — не знали французского языка;

90-(15 + 7) = 68 (чел.) — знали и французский и немецкий языки.

Ответ: 68 туристов знали и французский и немецкий языки.

Вариант 11

1. Можно решить устно: перенести 3 в правую часть и получить 30, затем поделить обе части на 30 и получить в числителе 7. Так как числитель равен знаменателю, то х-3 = 7, откуда находим х = 10.

2. Площадь фигуры равна 131.

3. Возможны 2 варианта параллелепипеда, построенного из 18 кубиков высотой 3 кубика: 3х3х2 или 3х6х1. Площадь поверхности данных параллелепипедов будет равна 42 и 54 площадей 1 грани. Учитывая, что площадь грани равна $\frac{19}{6}$ см^2, получим площадь поверхности: 133 см^2 или 171 см^2.

4. Так как вычитаемое и разность в сумме дают уменьшаемое, то два уменьшаемых будут равны 26, а, значит, уменьшаемое будет равно 13.

Вариант 12

1. Так как 3 ученика делают за 3 минуты 3 самолетика, то за 9 минут они сделают 9 самолетиков.

О т в е т: 3 ученика.

2. Так как масса всей рыбы будет равна (1900 + 100) • 9 + 1000 = 19000 (г), то каждому рыбаку должно достаться по 1900 г. Значит, разделить рыбу можно следующим образом: 1900 г; 100 г и 1800 г; ... 900 г и 1000 г.

3. Сумма возрастов всех футболистов была равна 11 • 22 = 242, а после удаления стала 10 • 21 = 210. Значит, возраст удаленного футболиста 32 года.

4. Обозначим за х и у — соответственно первоначальное число посетителей и новую цену билета. Тогда, после снижения цены, посетителей будет 1,5л:, а

сбор денег 1,5ху. Так как первоначально денег собрали 150л:, а сбор увеличился на 25%, то получаем уравнение 1,5ху—150л: = 0,25 • 150л:. Решая его, находим у = 125 (руб.), то есть цену снизили на 25 руб.

5. Задача имеет много решений, например: (4,-5,4, -5, 4); (5, -6, 5, -6, 5) и т. д.

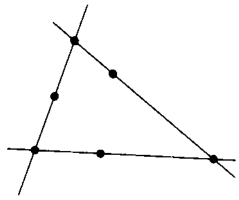


рисунок 16

Вариант 13

1. 48 лет и 4 года.

2. Возможный вариант показан на рис. 12.

3. Второй охотник съел столько каши, сколько положил крупы, поэтому третий охотник от него ничего не получил. Поэтому все патроны надо отдать первому охотнику.

4. В первом круге число слов должно делиться на 4, во втором — на 3, а в последнем — на 2. Наименьшее число, делящееся на 2; 3; 4, будет 12. Значит, наименьшее число слов в считалке будет равно 12.

6 класс

Вариант 1

1.х = -2,6.

2. $-4 \leq x \leq 3; -1 \leq y \leq 5$.

3. Число делится на 36, если оно делится и на 4 и на 9. Так как сумма цифр 5, 2, 2 равна 9, то сумма двух недостающих цифр должна равняться 0, 9 или 18. Учитывая, что число должно делиться на 4, а предпоследняя цифра равна 2, то последняя цифра может быть лишь 0 или 4 или 8. Тогда ответами будут числа: 52524, 52128, 52020, 52920.

4. 600 • 40 : 100 = 240 (г) — содержится соли в 600 г жидкости;

240 : 12 • 100 = 2000 (г) — будет 12% -й жидкости;

2000-600 = 1400 (г) — воды надо добавить.

Ответ: 1400 г.

5. Так как скорость ученика не может превышать 10 км/ч, то время на дорогу будет не менее $\frac{1}{10}$ ч, то есть не менее 6 мин. Поэтому ответ может быть таким: ученик придет в школу не раньше 8 часов 6 минут. Возможны и другие варианты ответа. Например, ученик придет в школу между 8 ч 6 мин и 8 ч 20 мин.

6. Так как Аня не проигрывала мальчикам в шахматы, то она — лучший шахматист. Так как художник не нарисовал своего портрета, а нарисовал портрет Игоря, то Игорь — лучший математик, а Олег — лучший художник.

Ответ: Олег — лучший художник, Аня — лучший шахматист, Игорь — лучший математик.

Вариант 2

1. $$\begin{array}{r} 59{,}27 \\ +\,44{,}45 \\ 78{,}43 \\ \hline 182{,}15 \end{array}$$

2. $55 : 5 + 5 = 16.$

3. $x = \pm 0{,}7.$

4. Обозначим число гусей в одном хлеве за x > а число козлят за y, тогда, учитывая, что ног в одном хлеве должно быть 10, получим уравнение: $2x+4y = 10$. Из данного уравнения имеем, что число козлят может быть только 1 или 2, соответственно гусей будет 3 или 1. Тогда размещение будет такое: в двух хлевах будет по 1 козленку и 3 гусям, в трех хлевах — по 2 козленка и 1 гусю.

5. Необходимо вынуть шарик из ящика с надписью «черный или белый». Если вынутый шарик окажется белым, значит, в этом ящике 2 белых, в ящике с надписью «2 белых» будет 2 черных, а с надписью «2 черных» будут черный и белый. Аналогично рассуждаем, если вынутый шарик — черный.

Вариант 3

2. Числа $\frac{8}{9}$ и 1 представим в виде дробей со знаменателем, кратным 15. Тогда $\frac{8}{9} = \frac{40}{45}$, $1 = \frac{45}{45}$?. Между числами $\frac{8}{9}$ и 1 лежат дроби $\frac{41}{45}$; $\frac{42}{45}$; $\frac{43}{45}$; $\frac{44}{45}$. Условию удовлетворяет лишь $\frac{42}{45} = \frac{14}{15}$.

Ответ: $\frac{14}{15}$.

3. $\frac{VI}{IX} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

4. Так как после зачеркивания получается наибольшее число с суммой цифр 13, то вторая и третья цифры равны 9 и 4. Так как первая цифра больше последней в 4 раза и все цифры различны, то первая цифра будет 8, а последняя 2. В результате получаем число 8942.

Ответ: старику Хоттабычу 8942 года.

5. Решается с помощью уравнения: $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$

О т в е т: 28 учеников.

Вариант 4

1. $x = -2\frac{1}{3}$.

2.

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 785 \\ 121 \end{array} \\ \hline 785 \\ + \; 1570 \\ 785 \\ \hline 94985 \end{array}$$

3. 550-55 = 495 (руб) — стала цена в итоге.

4. Так как число после приписывания двух цифр должно делиться на 15, значит, оно будет делиться на 3 и на 5. По признаку делимости на 5 последняя цифра в числе может быть лишь 0 или 5. Используя признак делимости на 3, получим, что первая цифра может быть 3,6,9 (если последняя цифра — 0) или 1,4,7 (если последняя цифра — 5). Тогда ответом будут числа: 1155, 3150, 4155, 6150, 7155, 9150.

5. Так как Володя учится в 6 классе, а Герасимов в 5 классе, то Володя — не Герасимов. Так как отец Иванова — учитель, отец Володи — инженер, то Володя — не Иванов. Тогда Володя — Семенов, Миша — Иванов, а Петя — Герасимов. Можно для наглядности применить графы или таблицы.

Вариант 5

1. Возможный вариант указан на рис. 13.

2. Возможный вариант:

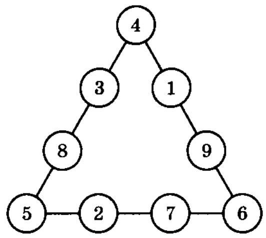


рисунок 17

$$25-\frac{3}{7}\cdot 7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot 25+125\cdot 357\cdot 0{,}008 = 25-3+8\frac{13}{25}\cdot 25+$$

$$+ 357 = 25-3 + 8\cdot 25 + 13 + 357 = 22 + 200 + 370 = 592.$$

3. x = 7 или x = 1.

4. Пусть x — число страниц, которое было в книге. В первый день прочитали (0,2x + 16) страниц; осталось прочитать во второй и третий дни (0,8x -16) страниц; во второй день прочитали (0,3(0,8x -16) + 20) = (0,24x + 15,2) страниц; в третий день прочитать осталось (0,56x —31,2) страниц. Так как в третий день прочитали 0,75 остатка и еще 30 книг, то остаток будет составлять 120 страниц. В итоге получаем уравнение:

0,56x - 31,2 = 120, откуда находим x = 270.

Ответ: 270 страниц.

5. Так как второе и третье сообщения ложны, то А является третьей планетой, а Б — не второй, поэтому Б — первая планета от звезды. Тогда В будет второй планетой, на которой живут инопланетяне.

Вариант 6

1. 46,02.
2. $x = 10$ или $x = -4$.
3.

$$\begin{array}{r} +\,8126 \\ 8126 \\ \hline 16252 \end{array}$$

4. Обозначим соответственно первую, вторую и третью цифру числа за a, b и c. Тогда число можно записать

$$100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a + 10b + c =$$
$$= 100\,100a + 10\,010b + 1001c = 1001(100a + 10b + c) =$$
$$= 7\cdot 11\cdot 13\cdot(100a + 10b + c).$$

Данное число делится на 7, на 11, на 13.

5. Для доказательства составим таблицу зависимости числа набранных очков от числа решенных задач.

Число решенных задач	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Число набранных очков	20	17	14	11	8	5	2	0	0	0

Из таблицы видно, что существует всего 8 различных возможностей получения очков. А так как учеников было 9, то, по крайней мере, два из них получили одинаковое количество очков.

Вариант 7

1. $\begin{array}{r} +\,3930 \\ 3980 \\ \hline 7910 \end{array}$

2. $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{64}$.

Ответ: $\frac{1}{64}$.

3. В первом городе взыскали с купца $\frac{5}{6}$ имущества, значит, осталось $\frac{1}{6}$ всего имущества. Во втором городе взыскали $\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$ имущества, значит, осталось

$\frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36}$ имущества. Аналогично рассуждая, получим, что после третьего города у купца останется $\frac{1}{216}$ часть имущества. Так как это имущество стоит 1000 денежных единиц, то всего имущества было на 21 600 денежных единиц.

Ответ: 21600.

4. Найдем дополнения каждой дроби до 1 и сравним их.

$1-\frac{9}{10} = \frac{1}{10}, 1-\frac{10}{11} = \frac{1}{11}, 1-\frac{11}{12} = \frac{1}{12}, 1-\frac{12}{13} = \frac{1}{13}$.

Так как $\frac{1}{10} > \frac{1}{11} > \frac{1}{12} > \frac{1}{13}$, **то** $\frac{9}{10} < \frac{10}{11} < \frac{11}{12} < \frac{12}{13}$.

Ответ: $\frac{12}{13}, \frac{11}{12}, \frac{10}{11}, \frac{9}{10}$.

5. Число различных денежных сумм, которые можно составить из менее чем 1000 дукатов, меньше 1000, то есть меньше числа пиратов. Поэтому у 2 пиратов будет одинаковое число дукатов.

6. Сумма 2 чисел будет четной, если они оба четные или оба нечетные. Сумма 2 чисел будет нечетной, если одно из них будет четное, а другое — нечетное. Допустим, что сумма любых 2 соседних чисел нечетна, тогда четные и нечетные числа должны чередоваться. Значит, общее число чисел будет четным, а по условию чисел 2009, — нечетное количество. Значит, допущение сделано неверно, и на самом деле найдутся 2 числа, сумма которых будет четна.

Вариант 8

1.17 кг.

2.

$$\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r}14286\\ \underline{14286}\end{array}\\
85716\\
114288\\
+\;28572\\
57144\\
\underline{14286}\\
204089796
\end{array}$$

3. Так как Наташа в зеленых туфлях, а Валя не в белых, то Валя в синих туфлях. Значит, Аня в белых туфлях. Так как цвет платья и туфель у Ани совпадает, то Аня в белом платье. Так как у остальных девочек цвет платья и туфель не совпадает, то Валя в зеленом платье, а Наташа — в синем.

Ответ: Аня в белом платье и белых туфлях, Валя в зеленом платье и синих туфлях, Наташа в синем платье и зеленых туфлях.

4. 35—10 = 25 (учеников) — посещают кружки,

25—20 = 5 (учеников) — посещают лишь экологический кружок,

11—5 = 6 (учеников) — посещают оба кружка.

О т в е т: 6 экологов увлекаются математикой.

5. Допустим, что во всех классах не менее 35 учеников, тогда во всей школе будет не менее чем 35-33 = 1155 (учеников), что противоречит условию задачи. Значит, в школе найдется класс, в котором менее, чем 35 учеников.

Вариант 9

1. Так как в один конец Дима пешком тратит на 20 минут больше, чем на велосипеде, то в оба конца он потратит пешком больше на 40 минут. Значит, всего на путь туда и обратно пешком он потратит 1 час.

2. Возможный вариант показан на рис. 14.

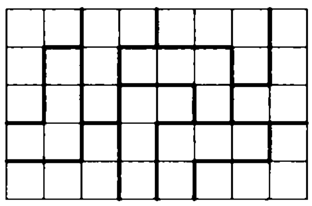


рисунок 18

3. Так как каждая грань большего кубика в 9 раз больше грани маленького, то и краски понадобится в 9 раз больше, то есть 18 г.

4. Решение лучше найти подбором. Пусть Маша за все покупки заплатила по 13 рублей, тогда покупок она сделала 18 и 5 рублей осталось ($239 = 13 \cdot 18 + 5$). Но 5 рублей остаться не может, так как разность в стоимости 1 блокнота и 1 тетради

составляет 2 рубля. Денег должно остаться четное число. Значит, надо сделать 17 покупок, а 18 рублей доплатить за 9 блокнотов. Тогда тетрадей будет 8, а блокнотов — 9. Других решений не будет, так как следующее четное число после 18 будет 34. Оно получается при 15 покупках, а так как $34 : 2 = 17$, то получается противоречие.

Замечание: Задачу в старших классах можно было решить, применив метод решения линейных уравнений с 2 переменными в целых числах.

Вариант 10

1. Так как знаменатель второй дроби в 20 раз больше знаменателя первой дроби, то корень уравнения можно найти устно:

$x= 12,3-20 + 4 = 250$.

2. Разложив 3232 на множители, получим:

$3232 = 32 \cdot 101 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 101$.

Так как все двойки должны быть в одном числе, то эти числа будут 32 и 101. Так как наименьшее кратное двух взаимно простых чисел будет равно их произведению, то оно будет равно 3232.

3. Из уравнения $13,5x = 12,5y$ следует, что

$x < y$, если x и y — положительные числа;

$x = y$, если $x = 0$ и $y = 0$;

$x > y$, если x и y — отрицательные числа.

4. Так как верхние прямоугольники имеют общую сторону и площадь правого в 2 раза больше, то и его вторая сторона будет в 2 раза больше. Аналогично и вторая сторона правого нижнего прямоугольника будет больше стороны верхнего левого прямоугольника в 3 раза. А это означает, что площадь нижнего правого четырехугольника будет в 6 раз больше площади левого верхнего прямоугольника, то есть будет равна 12 см^2.

Поэтому площадь всего прямоугольника будет равна 24 см^2.

Вариант 11

1. За 1 день первая и вторая овцы съедят вместе $\left(1+\frac{1}{2}\right)$ копны сена, а все остальные: $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$ (копны сена).

Так как $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$, а $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}<\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$, то первые две овцы имеют большую скорость поедания, а значит, и съедят 1 копну сена быстрее.

2. Андрей и Борис менялись местами четное число раз, поэтому Андрей останется впереди Бориса. Андрей и Виктор менялись местами также четное число раз, поэтому Андрей останется впереди Виктора. Борис же и Виктор менялись местами нечетное число раз, поэтому Виктор придет раньше Бориса.

Тогда порядок спортсменов на финише будет такой: Андрей, Виктор, Борис.

3. Разделим всех учеников на 2 группы: в первой — мальчики, во второй — девочки. Затем мальчиков, которые не любят математику, переведем во вторую группу, а девочек, которые любят математику, — в первую. Численности групп от этого не изменятся. Но в первой группе будут все ученики, которые любят математику, поэтому учеников, которые любят математику столько же, сколько и мальчиков.

4. Например: 20042004...2004 (цифры 2,0, 0, 4 повторяются 334 или 2004 раза).

Школьная олимпиада г. Кострома 2009г.

Решения, указания
5 класс

Задание №1
Ответ: 999+999+99:9=2009.
Возможны другие варианты.
Задание №2
Ответ: 38 рублей.
Решение.
15-11=4 (тетради), 5+7=12 (рублей). Разница между предполагаемыми покупками в тетрадях и рублях. Значит, 4 тетради стоят 12 рублей, а одна тетрадь стоит 12:4=3 (рубля). 11×3+5=38 (рублей) или 15×3-7=38 (рублей) было у Маши.
Задание №3
Ответ: 625.

Решение.

Число однозначных чисел равно 5. К каждому однозначному «симпатичному» числу вторая нечётная цифра может быть дописана пятью различными способами. Таким образом, двузначных «симпатичных» чисел всего $5 \cdot 5=25$. Аналогично 3-значных симпатичных чисел $5 \cdot 5 \cdot 5=125$, и 4-значных - $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5=625$.

Задание №4

Ответ: 30 минут.

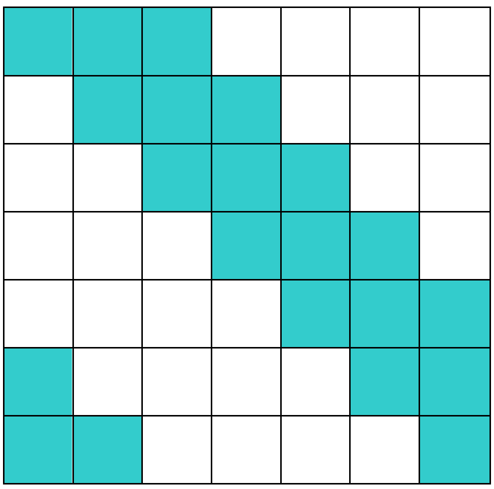
Решение.

Задача состоит из двух частей: доказать, что за 30 минут управиться можно, и доказать, что быстрее выполнить работу нельзя. Начнём со второй части. Всего у 18 лошадей $18\times4=72$ копыта. Если бы всю работу делал один кузнец, то ему потребовалось бы $72\times5=360$ минут. Значит, 12 кузнецов никак не смогут выполнить всю работу быстрее, чем за $360:12=30$ минут. Покажем теперь, как можно подковать всех лошадей за 30 минут. Разобьем кузнецов на 3 бригады по 4 кузнеца в каждой и выделим каждой бригаде по 6 лошадей. Каждая бригада сможет подковать «своих» лошадей за 30 минут следующим образом. Организуем конвейер, назначив каждого кузнеца «ответственным» за определённую ногу лошади. Первые 5 минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу первой лошади, второй – переднюю левую второй лошади, третий – заднюю правую третьей, четвертый – заднюю левую четвёртой. Пятая и шестая лошади пока отдыхают.

Затем сдвигаем лошадей «по кругу». Вторые пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу второй лошади, второй – переднюю левую третьей, третий – заднюю правую четвёртой, четвёртый – заднюю левую пятой. Шестая и первая лошади отдыхают. Третьи пять минут первый кузнец подковывает переднюю правую ногу третьей лошади, второй – переднюю левую ногу четвёртой лошади, третий – заднюю правую пятой, четвёртый – заднюю левую шестой. Первая и вторая лошади отдыхают. Продолжив работу по это схеме, каждая бригада подкуёт «своих» лошадей за 30 минут, а, значит, 12 кузнецов подкуют 18 лошадей за 30 минут.

Задание №5

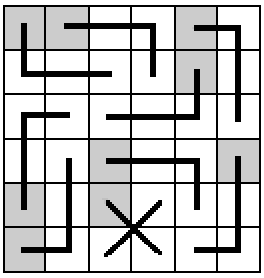
Ответ:



Возможны другие варианты.

6 класс

Задание №1
Ответ: 3 школьника
Решение:
Пусть каждому занимающемуся в секциях дадут удостоверение. Тогда, секции плавания и велосипеда выдали 25 удостоверений. Из них 19-ребятам, занимающимся в лыжной секции. Значит, ребятам посещающим и секцию плавания, и лыжную секцию выдано 25-19=6 удостоверений, и каждый их них получил ровно два удостоверения. Значит, всего таких ребят 6:2=3.
Задание №2
Ответ: не сможет.
Решение:
Упорядочим Петины карманы по возрастанию. Тогда в самом «маленьком» может быть ноль монет, в следующем будет лежать не менее одной монеты и т.д. Наконец, в последнем, в десятом кармане окажется не менее 9 монет. Следовательно, во всех 10 карманах будет лежать не менее 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 монет. А всего монет 44.
Задание №3
Ответ:



Задание №4
Решение.
Представим, что пирог разрезали на шесть равных частей. Первому другу Саша дал $\frac{1}{6}$ пирога, то есть одну из шести равных частей, – осталось пять таких же частей. Второму другу Саша дал $\frac{1}{5}$ остатка, то есть такую же часть, как и первому. Осталось четыре такие же части. Третьему он дал еще одну часть: то есть $\frac{1}{4}$ того, что осталось, четвертому тоже один кусок: $\frac{1}{3}$ нового остатка. Последние две равные части Саша разделил с пятым другом. Всем досталось поровну.
Задание №5
Решение:
Если 10 крыс насытились, то всего было съедено не менее 10·4=40 крыс. Но хотя бы одна крыса осталась в живых. Значит, 10 крыс насытиться не могли.

Школьная олимпиада г. Кострома 2011г.

Решение

5 класс

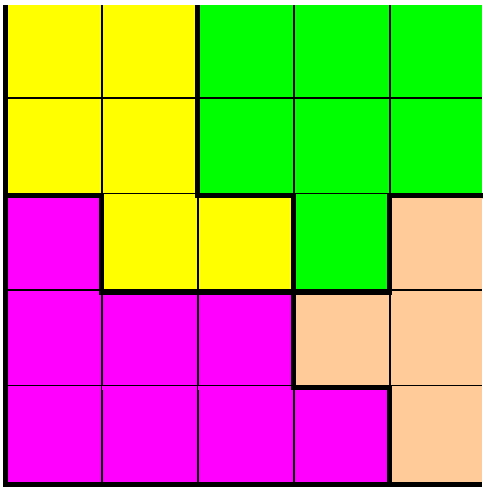
1. Ответ: Число 92

Решение: Зачёркнута цифра 9

2. Ответ: 150 рублей

Решение: Если бы Матроскин купил яблоки по той же цене, что Шарик, то заплатил бы за них 75·4=300 рублей. Так как за каждое яблоко он заплатил вдвое меньше, то Матроскин истратил 300:2=150 рублей.

3. Ответ:



Решение: сосчитаем, сколько всего клеточек в данных фигурках. 4+5+6+7+8=30. Чтобы получился квадрат, нам надо 25 клеточек, а у нас их 30. Значит, лишней окажется фигурка из 5 клеток.

4. Ответ: Женя — девочка

Решение: Так как в детский сад может ходить только пятилетний ребёнок, то самый младший ребёнок — девочка. Значит, Мише — не пять лет. Аня старше Миши, то есть Ане исполнилось либо 13, либо 15 лет. Так как сумма возрастов Ани и Жени делится на три, то Ане не может быть пятнадцать лет. Следовательно, Ане — тринадцать. Миша её младше, значит, Мише — восемь. Тогда Жене пять лет и она девочка.

5. Ответ: на 24 монеты.

Решение: После того, как первый пират отдал второму половину своих монет, то есть 8, у него осталось 8 монет, а у второго пирата стало 16 + 8 = 24 монеты. Теперь второй отдаёт третьему пирату 24:2 = 12 монет, и у него остается 12 монет, а у третьего 16 + 12 = 28 монет. Когда третий пират отдаст четвёртому 28:2 = 14 монет, то у него останется 14 монет, а у четвёртого станет 16 + 14 = 30 монет. Теперь четвёртый отдаст пятому пирату 30:2 = 15 монет, и у пятого пирата стало 16 + 15 = 31 монета. Итак, у пятого пирата монет стало больше, чем у первого на 31 – 8 = 24 монеты.

6 класс

1. Решение: Достаточно одного примера:

$$\frac{5}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6} \quad \text{или} \quad \frac{5}{30}-\frac{0}{3}=\frac{1}{6}$$

2. Ответ: 404 таблетки

Решение:

Пусть x таблеток выдал Айболит крокодилу и столько же удаву.

(x+1) таблеток получил носорог,

(x+2) таблетки бегемот и (x+3) таблетки слон.

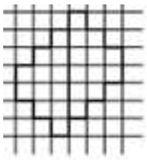
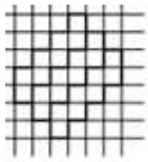
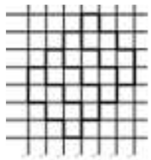
$x+x+x+1+x+2+x+3=2011$, $x=401$. Значит, слон получил 404 таблетки.

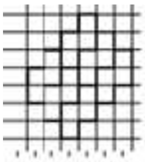
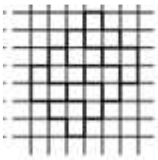
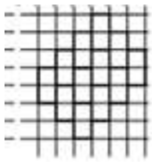
3. Ответ: белый бант

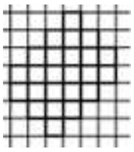
Решение: Предположим, что сова угадала вид подарка (шарик), тогда собака и попугай угадали его цвет. Поскольку они назвали разные цвета, то такого быть не может. Следовательно сова угадала цвет подарка (белый), а собака и

попугай угадали его вид (бант).

4. Решение: Данная фигура содержит 24 клетки. Поскольку её требуется разрезать на равные части, то в каждой должно быть равное количество клеток. Значит количество частей должно быть делителем числа 24. Выпишем все делители числа 24: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. На одну часть разрезать фигуру нет смысла, поэтому покажем все остальные случаи.

 рис. а  рис.б  рис. В

 рис.г  рис.д  рис.е

 рис.ж

5. Ответ: фальшивая тяжелее

Решение. Положим на каждую чашу по 50 монет. Если чаши будут весить одинаково, то оставшаяся монета фальшивая, а монеты, которые лежат на чашах, настоящие. Чтобы узнать, тяжелее или легче весит фальшивая настоящей, достаточно сравнить ее с любой настоящей монетой. Если же одна из чаш весит больше другой, то возьмем ее и разобьем на две кучки по 25 монет. Если они весят одинаково, то фальшивая монета была на другой чаше, значит, фальшивая легче. Если же одна из чаш перевесит, то фальшивая монета была в этих 50, т. е. фальшивая тяжелее.

Творческая лаборатория «ДваждыДва»:
письменный тур олимпиады пятиклассников 2009

Часть А

1.*Ответ:* 21 книга.

Решение. Слева до энциклопедии стоит 4 книги, а справа — 16 книг. Всего 4+16+1=21.

2.*Ответ*: тяжелее 2 карася.

Решение. Из условия следует, что 6 карасей тяжелее 10 лещей. То есть 3 карася тяжелее 5 лещей. Значит, карась тяжелее леща и 4 карася тяжелее 6 лещей.

3.*Ответ*: Заяц.

Решение. Поскольку самый глупый зверь соврал, то это либо заяц, либо волк. Если солгал заяц, то, значит, волк сказал правду. Тогда лиса выиграла и волк не глупее лисы, но тогда лиса не может быть самой умной и по условию не может выиграть. Противоречие. Если же солгал волк, то выиграла не лиса и верно, что волк глупее лисы. Но тогда волк не мог выиграть и, значит, выиграл заяц.

4.*Ответ*: 6 конфет.

Решение. Если конфет будет в три раза больше, то 12 конфет составляют две трети от того, что было бы, значит одна треть равна 6.

5.*Ответ*: 3.

Решение. У всех однозначных чисел всего 9 цифр. Сосчитаем, сколько цифр у двузначных чисел. Двузначных чисел 90, значит цифр 180. Так как вычеркнуто 200 цифр, то вычеркнуто 11 цифр трехзначных чисел. Это 100, 101, 102 и 10.

6.*Ответ*: 18 февраля.

Решение. За каждый сутки длина шарфа увеличивается на 10см. Значит утром 18 февраля шарф будет длиной 170см. Связав к вечеру еще 30см, Лида довяжет шарф.

7.*Ответ*: 4 999 999 995 .

Решение. Поскольку в каждом разряде побывают все цифры, то требуется сумму всех цифр умножить на 111 111 111.

8.*Ответ*: (а) 55; (б) в 6 раз.

Решение. Высота четырех этажей дома Гуливеров равна высоте 24 этажей дома Лилипутов. Значит на один этаж Гуливеров приходится 6 этажей Лилипутов.

9.*Ответ*: два.

Решение. Утверждение Васи не может быть верно, так как если все лжецы, то Вася должен лгать, а он сказал правду. Значит, говорящий правду точно есть. И лжец тоже есть (Вася) Тогда утверждение Лёши тоже неверно. Следовательно, два лжеца точно есть (Вася и Лёша). Тогда Миша — не лжец.

10.*Ответ*: 46,5м^2.

Решение. Размер всей площади 70м^2 (=7×10) Чтобы найти площадь катка, нужно из 70 вычесть площадь внешней области. Заметим, что серые треугольники равны и, соответственно, равны их площади. Каждый из них есть половина прямоугольника 1×2, то есть площадь каждого их них равна 1м2. Из трех оставшихся белых треугольников два равны и составляют вместе квадрат 2×2, а третий есть половина от прямоугольника 1×3 и, следовательно, его площадь равна 1,5 м2. Суммируя найденные площади и площадь темных клеток, получаем 5 + 4 + 1,5 +13 = 23,5.

11.*Ответ*: (а) два; (б) 16.

Решение. Осенью (с 1 сентября по 30 ноября) 91 день. Кружок математики проходит один раз в 6 дней. $91 = 6\times15 + 1$. Поскольку 1 сентября занятия тоже были, то в оставшиеся 90 дней было ровно 15 занятий. Чтобы все четыре кружка после 1 сентября снова были в один день, нужно, чтобы прошло НОК(3;4;5;6)=60 дней. Второй раз (когда пройдет еще 60 дней) это случится уже после ноября.

Часть Б

1.*Ответ*: не могли.

Решение. Заметим, что сумма длин горизонтальных стрелок на плане равно удвоенному расстоянию, пройденному вправо, то есть 6км. Аналогично для вертикальных стрелок. Таким образом, школьники прошли 12км, а не 10.

2.*Ответ*: не может.

Решение. Если Настя списала семь задач, то их кто-то должен был решить, но Аня, Саша и Витя решили не более, чем по две задачи каждый, то есть не более 6 задач.

3. *Решение*. Запишем условие задачи в виде уравнений: Ю+В=97; С+И=234; В+С+ТП=153; И+ТП+Ю=277. Тогда, складывая эти уравнения, получим, что 2(Ю+В+С+И+ТП) = 97+234+153+277 — нечетное число. Противоречие.

4. *Решение*. Обозначим монеты З1, З2, С1, С2, М1, М2. Первым взвешиванием взвесим пару З1 и С1 с парой З2 и М1. Разберем два случая: весы в равновесии. Поскольку среди золотых ровно одна фальшивая, то и среди С1 и М1 ровно одна фальшивая и ровно одна настоящая. И на каждой чаше лежит одна настоящая и одна фальшивая. Тогда вторым взвешиванием взвесим С2 и М2. Равновесие уже невозможно, поэтому мы в любом случае определим, какая из монет легче. Пусть это М2, тогда М1, С2 и З2 настоящие. Если же это С2, то настоящие М2, С1 и З1. Одна чаша перевесила. Пусть тяжелее З1 и С1 (второй вариант

разбирается аналогично). Это означает, что З1 точно настоящая, З2 — фальшивая. Для пары С1;М1 возможны варианты НН, ФФ и НФ, варианта ФН быть не может. Теперь вторым взвешиванием взвесим обе золотые монеты с парой С2 и М2. Если весы окажутся в равновесии, то означает, что реализуется вариант НФ, если золотые перевесят, то обе монеты С2 и М2 фальшивые, если же перевесит чаша с серебряной и медной монетой, то они обе настоящие.

5. *Решение*. Рассмотрим на этом клетчатом листе квадратик 3×3 клетки. Для любых двух клеток этого квадрата найдется фигура заданного вида, что эти клетки принадлежат этой фигуре. Но тогда, поскольку в квадрате 3×3 содержится 9 клеток, а цветов только 8, то найдутся две клетки одного цвета. Фигура, содержащая эти две клетки и будет искомой.

Областной этап олимпиады по математике

учащихся общеобразовательных учреждений (2010г.)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

5 класс

1. **Решение.** Перепишем ребус в виде

$$\begin{array}{r} ОГОГО \\ +\underline{УГУГУ} \\ УГУГУГ. \end{array}$$

Сразу можно определить, что У=1. Тогда О= 8 или О=9. Если О=8, то

$$\begin{array}{r} 8Г8Г8 \\ +\underline{1Г1Г1} \\ 1Г1Г1Г. \end{array}$$

Если Г=9, то 89898+19191=109089.

Значит, Г≠9 и О=9. Получаем 90909+10101=101010.

Ответ: 90909+10101=101010.

2. **Решение.** Чтобы сложить куб со стороной 40 см, нужно 8 кубиков со стороной 20 см. Поэтому дерево для него будет стоить 8·10 = 80 копеек. При

этом каждая грань большого куба — квадрат со стороной 40 см — будет складываться из четырёх граней маленьких кубиков. Поэтому лак для его лакировки обойдётся вчетверо дороже, то есть будет стоить $4 \cdot 30 = 120$ копеек. Таким образом, всего материалы для изготовления куба со стороной в 40 см обойдутся в $80+120 = 200$ копеек. Деля 200 на 40, получаем ответ.

Ответ: В 5 раз.

3. **Решение.**

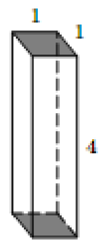
Пусть первоначально было 90 плохих грибов с 10 червяками каждый. Всего 900 червяков. При переползании по 1 червяку из каждого плохого гриба в хорошие, в каждом грибе из 100 станет по 9 червей, т.е. все они станут хорошими.

Ответ: могут.

4. **Ответ.** Например, он может сложить башню из

четырех кубиков $1\times1\times1$, «завернуть» ее в квадрат 4×4,

а низ и верх заклеить квадратами 1×1



5. По условию задачи в качестве искомых рассмотрим числа 21, 42, 63, 84.

Рассмотрим равенства

$21=x^2-4$,

$42=y^2-16$,

$63=c^2-36$,

$84=a^2-64$.

Тогда $x^2=25$, $y^2=58$, $c^2=99$ и $a^2=148$. Получаем, что $x=5$ (натуральных y, c и a, удовлетворяющих данным равенствам, не существует).

Ответ: Можно, номер квартиры – 21 .

6 класс

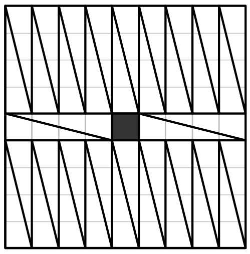
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ.

1. **Решение.**

Пусть шаг Малыша – n см, а количество шагов в минуту m. Тогда шаг Карлсона 0,8n, а количество шагов 1,2m. Малыш проходит за минуту m·n см, а Карлсон 0,8n·1,2m =0,96mn (см). Значит, быстрее ходит Малыш.

Ответ: Малыш.

2. **Решение.**



Достаточно разрезать её на 20 прямоугольников размером 1×4 клеточки, а потом каждый прямоугольник разрезать по диагонали на два одинаковых треугольника. Это можно сделать многими разными способами, один из которых — на рисунке справа.

3. **Решение.**

Приведем несколько примеров: 1) **48** = 3·$\mathbf{4^2}$; **49** = $\mathbf{7^2}$; **50** = 2·$\mathbf{5^2}$; 2) **98** = 2·$\mathbf{7^2}$, **99** = 11·$\mathbf{3^2}$, **100** = $\mathbf{2^2}$·$\mathbf{5^2}$; 3) **124** = 31·$\mathbf{2^2}$, **125** = $\mathbf{5^3}$, **126** = 14·$\mathbf{3^2}$.

Указанные «тройки» чисел – наименьшие из возможных.

Ответ: да, существуют

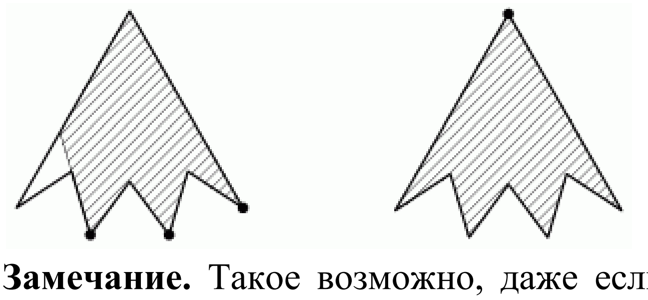
4. **Решение.**

Пусть x – количество рыцарей. Тогда каждый из них провел x-1 поединок, а всего состоялось x(x-1):2 поединков (каждый поединок учитывается двоим рыцарям). Получаем уравнение x(x-1):2=105 или x(x-1)=210.

Разложим число 210 на простые множители: 210=2·3·5·7. Поскольку, по условию, количество рыцарей и проведенных ими поединков отличается на 1, то рыцарей было 15 (т.к. 210=14·15). Поэтому, кроме Шляпника, в состязании приняло участие 14 рыцарей.

Ответ: 14 рыцарей.

5. **Ответ.** Да, могло (см. рисунок). Жирной точкой отмечена лампочка,



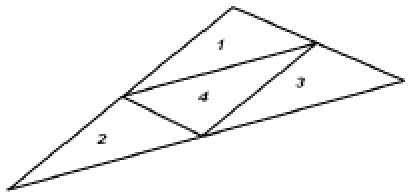
Замечание. Такое возможно, даже если заменить три на любое другое, сколь угодно большое число.

Межрегиональная заочная математическая олимпиада 2008/09 учебного года (Всероссийской школы математики и физики «Авангард»).

6 класс

Решения задач

1. Для решения соединим середины сторон треугольника (см. рисунок).



2. Очевидно, что вторая цифра второго сомножителя — **0**. Последняя цифра второго сомножителя может быть либо четверкой, либо девяткой. В первом случае первая строка результата — 3764, а во втором — 8469. Чтобы третья от конца цифра произведения равнялась трем, последняя цифра второй строки результата (и соответственно первая цифра второго сомножителя) должна быть в первом случае — 6, а во втором — 9. При этом вторая строка результата в первом случае будет 5646, а во втором — 8469. Второй случай невозможен, поэтому второй сомножитель — 604. Пример принимает вид: $941 \cdot 604 = 568\,364$.

3. Продолженные грани куба представляют собой три пары параллельных плоскостей. Каждая пара делит пространство на три части. Следовательно, всего будет $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ частей.

4. Турнирная таблица двухкругового чемпионата из N команд имеет размер $N \text{ x } N$ с перечеркнутыми диагональными клетками, то есть содержит $N^2 - N = N(N-1)$ клеток для внесения результатов. Столько должно быть и матчей. То есть число 9702 нужно представить в виде произведения двух последовательных натуральных чисел. $9702 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ и представимо в искомом виде единственным способом: $9702 = 99 \cdot 98$. В чемпионате участвуют 99 команд.

5. Задача может быть решена в одно взвешивание. Разделим шарики на две кучки по 1006 шариков и взвесим их. Если неравенство — задача решена. Если в результате взвешивания получится равенство, то значит, что в каждой кучке по 503 шарика каждого вида (понятно, что равные по весу кучки из равного количества шариков должны быть одинаковы по их составу). Теперь разделим любую из этих кучек по 1006 шариков на две по 503 (взвешивать для этого ничего не надо). Полученные две кучки всегда имеют разный вес. Действительно, если предположить, что их вес может быть одинаковым, то в этом случае в обеих кучках должно быть равное количество шариков каждого вида, что невозможно, так как 503 не делится на 2.

Интернет-ресурсы для подготовки школьников к участию в олимпиадах по Математике

Задачи: информационно-поисковая система задач по математике. Сайт включает такие рубрики как «Условие», «Решение», «Подсказка» (указания к решению), «Информация» (методы и приемы решения, используемые в решении; факты, используемые в решении; объекты и понятия, используемые в решении; источники и прецеденты использования), каждую из которых ученик может открыть при решении любой содержащейся в сайте задачи. http://zadachi.mccme.ru

Конкурсные задачи по математике: справочник и методы решения
Методы решения уравнений, систем, неравенств. Текстовые задачи и задачи с параметрами. Задачи по планиметрии и стереометрии. Примеры и задачи для самостоятельного решения. Краткий справочник по элементарной математике и типовая программа для абитуриентов.
http://mschool.kubsu.ru/cdo/shabitur/kniga/tit.htm

Материалы (полные тексты) свободно распространяемых книг по математике, предоставленные авторами и издательствами (по возможности в форме оригинал-макетов с исходными текстами), а также записки лекций, сборники задач, программы курсов и т.п.
http://www.mccme.ru/free-books/

Математика для поступающих в ВУЗы
Сборник задач по математике (более 2000). В основном задачи, которые в разное время предлагались на письменных экзаменах в МГУ и МФТИ до 1999 года включительно. Задачи даны с ответами. Некоторые варианты вступительных экзаменов дополняются решениями задач. Для просмотра требуется браузер с поддержкой JAVA. http://www.matematika.agava.ru/

Выпускные и вступительные экзамены по математике: варианты, методика
Варианты выпускных школьных экзаменов по математике (общероссийских и Санкт-Петербургских) для классов с разными уровнями изучения предмета. Варианты вступительных (предварительных и основных) экзаменов в СПбГУ и другие вузы Санкт-Петербурга. Несколько методических статей. http://www.mathnet.spb.ru/

Олимпиадные задачи по математике: база данных
Около 8000 задач школьных, региональных, всероссийских и международных конкурсов, олимпиад и турниров по математике. Многие задачи с ответами, указаниями, решениями. До 2001 года (включительно). Возможности поиска. http://zaba.ru/

Московские математические олимпиады
Задачи окружных туров олимпиады для школьников 5-11 классов, начиная с 2000 года. Задачи городских туров олимпиады для школьников 8-11 классов начиная с 1999 года. Все задачи с подробными решениями и ответами. Новости олимпиады. Победители и призеры олимпиад. Статистика. http://www.mccme.ru/olympiads/mmo/

Школьные и районные математические олимпиады в Новосибирске
Задачи для 3-11 классов с 1998 года по настоящее время. Без решений. Раздел занимательных и веселых задач. http://aimakarov.chat.ru/school/school.html

Виртуальная школа юного математика
"Виртуальная школа юного математика" содержит задачи, комментарии, подробные контрпримеры, полные доказательства некоторых математических проблем теоретического характера, темы и задачи, малоизучаемые (или вообще не изучаемые) в школьном курсе математики, практикум абитуриента, странички из истории математики, математические словари, условия и решения задач выпускных экзаменов. Раздел "Практикум абитуриента" содержит необходимый минимум задач, которые нужно уметь решать поступающему в вуз. Задачи по каждой теме расположены в порядке возрастания их сложности и по возможности классифицированы и снабжены решениями. http://math.ournet.md/indexr.html

Библиотека электронных учебных пособий по математике
Задачи математических олимпиад и турниров. Интерактивные обучающие ресурсы по многим разделам элементарной и высшей математики. Математические тесты, пособия и справочники. http://mschool.kubsu.ru/

Интерактивный ознакомительный вариант ЕГЭ по математике 2004 года
http://ege.edu.ru/demo-ege/mathematics-2004.shtml

Краткие рекомендации по использованию материала

У каждого учителя есть свои копилки (папки) с олимпиадными задачами, которые собираются на протяжении всей трудовой деятельности педагога. Очень часто просто не хватает времени оформить эту имеющуюся информацию в единый задачник или справочник по решению олимпиадных задач. В данной работе сделана попытка собрать из разных источников достаточное число олимпиадных задач, для решения которых должно хватить сведений, полученных в ходе изучения математики в первых пяти классах. Конечно, невозможно собрать все имеющиеся интересные задачи, доступные для учащихся 5-6 классов. Но для преподавателя важно иметь пособие, в котором представлены идеи решений и которое позволило бы провести цикл занятий олимпиадного кружка, не прилагая титанических усилий для подготовки к занятиям.

Мной предпринята попытка составления такой разработки, которую можно было бы использовать при непосредственной подготовке к занятиям. При этом порядок изложения тематических разделов может варьироваться в зависимости от целей учителя. При подготовке учеников к олимпиадам, каждый учитель, ставит перед собой цель - научить их решать задачи. Конечно, учитель может остановиться на показе способов решения определённых видов задач, после чего ученики начинают применять эти алгоритмы к другим задачам. Но, наиболее правильным, наверное, путём обучения будет разумное сочетание самостоятельной работы учеников с обучением их общим методам и подходам.

<u>*Как я использую данный материал для подготовки учащихся к олимпиадам?*</u>

В домашнее задание включаю задачи, требующие нестандартного мышления. Провожу собеседование и предлагаю всем желающим заниматься решением задач во внеурочное время. Часто повторяю своим ученикам *слова Д.Пойа: «Чтобы научиться решать задачи, надо их решать».*

В любом классе есть более сильные ученики, которые выполняют на уроке запланированный материал быстрее других. Для этих учащихся и предназначены задачи. Каждая глава находится в отдельной папке и если ученик выполнил все запланированные задания, он может в ходе урока использовать данный материал для работы. Некоторые обучающиеся берут папки домой для дополнительной, более тщательной проработки.

Рекомендую учащимся читать дополнительную литературу по теории, вести поиск задач, решать их самостоятельно. Учиться надо не тому, что легко получается. Ценно ваше напряжение сил. Особенно важно, чтобы ребята знали общую идею, лежащую в основе всех методов и способов решения задач: решая новую задачу, сведи её к одной или нескольким ранее решенным задачам.

В заключение опишу несколько методических приемов, которые я использую при подготовке учащихся к конкурсам и олимпиадам.

<u>*Погружение*</u>*:* индивидуальная работа ученика при поиске возможного решения поставленной задач.

<u>*Обмен опытом*</u>*:* работа в двойках, обмен и критика возникших идей.

Мозговой штурм: групповое обсуждение решений.

Подсказка: беглое знакомство с авторским решением, с последующим самостоятельным решением.

Консультации: консультация у старших и более опытных товарищей.

Консультация преподавателя.