Признаки равенства треугольников

Рабочая тетрадь по геометрии для 7 класса

Авторы: И.С. Бурачкова,

Т.А. Сазанова

СОДЕРЖАНИЕ

§1. Первый признак равенства треугольников.

Задание 1.

1. Начертите треугольник **ABC**. Дайте определение треугольника.

2. а) Запишите все возможные обозначения данного треугольника.

   б) Укажите: сторону, лежащую против угла **C**; угол, лежащий против стороны **CM**; углы, прилежащие к стороне **EC**; угол между сторонами **EC** и **EM** (рис.1.1).

   в) Измерьте меньшую сторону данного треугольника и его больший угол и запишите результат измерений (рис.1.1).

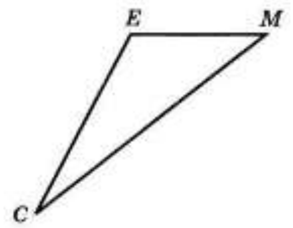


Рис.1.1

Ответ:

а) **ΔCEM**______________________;

б) Против угла **C** лежит сторона____ ; против стороны **CM** лежит __________; к стороне **EC** прилежат углы _______ ; между сторонами **EC** и **EM** — угол______;

в) **EM** =_____см; **ΔCEM** =_______.

3. Найдите равные треугольники, укажите их соответственно равные элементы (рис.1.2, рис.1.3, рис.1.4).

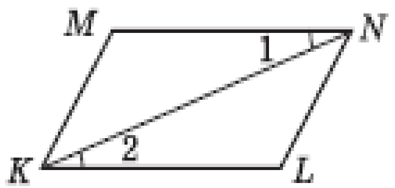


Рис. 1.2

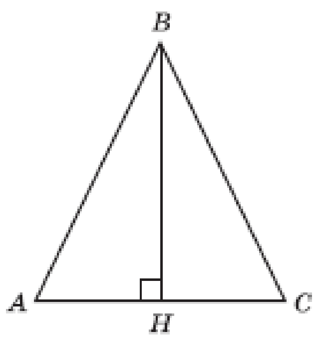


Рис. 1.3

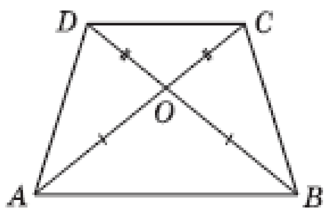


Рис. 1.4

Постройте два равных треугольника. Дайте определение равных треугольников (рис.1.5).

Определение: Δ**ABC**=Δ**A$_1$B$_1$C$_1$**

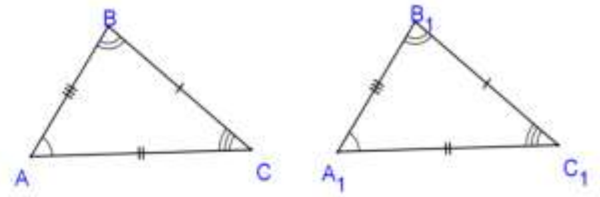


Рис.1.5

AB = A$_1$B$_1$,

AC = A$_1$C$_1$,

BC = B$_1$C$_1$,

$\angle$A = $\angle$A$_1$,

$\angle$B = $\angle$B$_1$,

$\angle$C = $\angle$C$_1$,

Лабораторно-графическая работа

Цель: проверить, равны ли треугольники, если у них равны соответственно по две стороны и углы между ними.

Оборудование: лист бумаги, чертежные принадлежности, прозрачная пленка.

Ход работы:

1. Постройте Δ**ABC** и Δ**A$_1$B$_1$C$_1$** так, чтобы **AC** =**A$_1$C$_1$**= 3см, **$\angle$A** =**$\angle$A$_1$**=60^o, **AB**=**A$_1$B$_1$**=4см.
2. Проверьте 2 способами, будут ли равны треугольники:

а) Измерив стороны и углы (измерения занесите в таблицу 1.1);

Таблица 1.1

ΔABC	AB=	BC=	AC=	$\angle$A=	$\angle$B=	$\angle$C=
$\Delta A_1B_1C_1$	A_1B_1=	B_1C_1=	A_1C_1=	$\angle A_1$=	$\angle B_1$=	$\angle C_1$=

б) С помощью прозрачной плёнки.

Наложите её на Δ**ABC**, обведите его, затем наложите плёнку на Δ**A$_1$B$_1$C$_1$** . для удобства совмещения приколите плёнку в точке **A$_1$** кнопкой (рис.1.6).

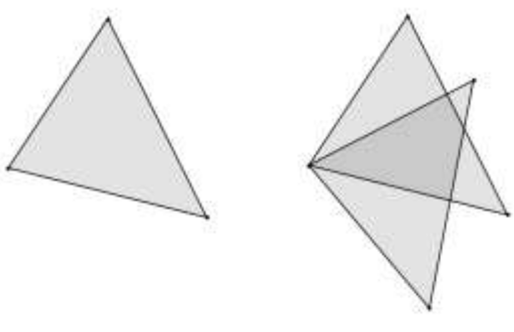


Рис.1.6

3. Сделайте вывод о том, сколько пар равных элементов достаточно для равенства треугольников? Назовите эти элементы. Сформулируйте теорему.

Задание 2.

При наложении треугольника **АВС** на треугольник **МКН** сторона **АВ** совместилась со стороной **МК**, сторона **АС** — со стороной **МН.**

Совместилась ли сторона **ВС** со стороной **КН?** Объясните ответ.

Решение. Так как стороны **АВ** и **АС** совместились со сторонами _____ , то точки **В** и **С** совместились соответственно с точками ______. Следовательно, концы отрезков **ВС** и ____ совместились, а значит, отрезки **ВС** и **КН** ______ .

Задание 3.

1. Прочитайте формулировку теоремы первого признака треугольников, в учебнике.
2. Запишите условие теоремы.
3. Сделайте чертёж.
4. По тексту учебника прочитайте и разберите доказательство теоремы.
5. Запишите в тетрадь идею доказательства:

Ответьте на вопросы:

- Почему существует треугольник $\mathbf{A_1B_1C_1}$ равный треугольнику **АВС** ?
- Что означает, что треугольник $\mathbf{A_1B_2C_2}$ равен треугольнику **АВС** ?
- Почему точка $\mathbf{B_2}$ совпадает с точкой $\mathbf{B_1}$?
- Почему луч $\mathbf{A_1C_2}$ совпадает с лучом $\mathbf{A_1C_1}$?
- Почему точка $\mathbf{C_2}$ совпадает с точкой $\mathbf{C_1}$?
- Почему $\Delta\mathbf{A_1B_1C_1}=\Delta\mathbf{ABC}$?

6. Заполните пропуски в формулировке и доказательстве первого признака равенства треугольников.

Теорема. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны _______________________________ другого треугольника, то такие треугольники ___________;

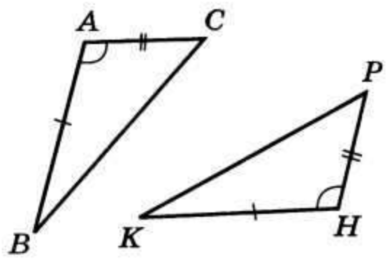


Рис.1.7

Дано : Δ**ABC** и Δ**HKP**, **AB** = **HK**, **AC** = **HP**, $\angle$**A** = _______ (рис.1.7);

Доказать: Δ**ABC**= ________;

Доказательство:

1)По условию теоремы$\angle$**A** =$\angle$**H**, поэтому треугольник **ABC** можно наложить на ___________________ так, что вершина **A** совместится с вершиной **H**, а стороны **AB** и **AC** наложатся соответственно на лучи **HK** и _______;

2)По условию **AB** =_____ , **AC** =______, следовательно, сторона **AB** совместится со стороной ___________ , а сторона **AC** — со стороной ______ , в частности, совместятся точки **B** и ___ , **C** и ____ .

Поэтому совместятся стороны _________________________;

3)Итак, треугольники **ABC** и **HKP** полностью совместятся, значит, они ___________. Теорема доказана.

Задание 4.

Решите задачи устно по рисункам:

а) Докажите, что треугольники на рисунке равны и запишите это равенство (рис.1.8).

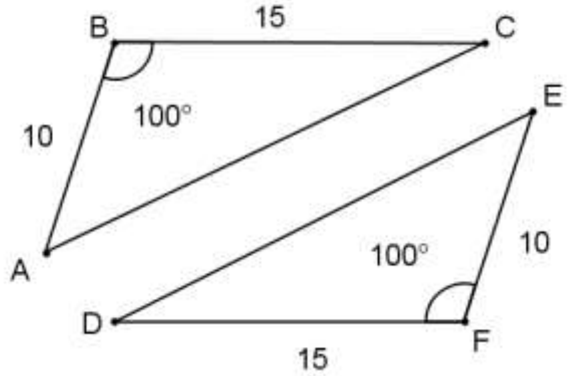


Рис.1.8

б) Найдите **DK** (рис.1.9).

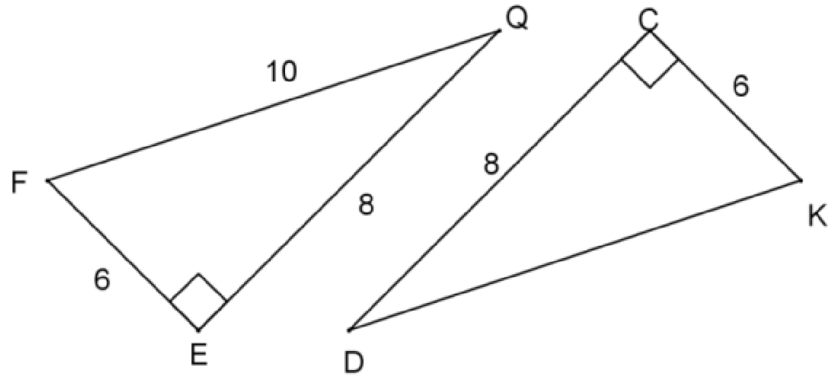


Рис.1.9

в) Найдите **CD** (рис.1.10).

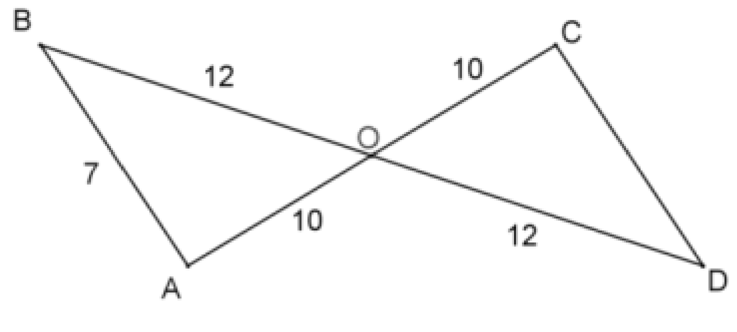


Рис.1.10

Задание 5.

Решите задачи по готовым чертежам:

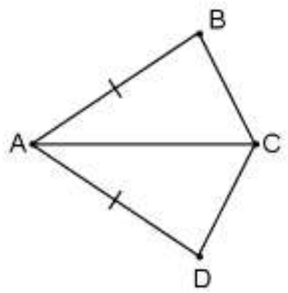


Рис.1.11

а) Дано: **AC** – биссектриса $\angle$**A;**

AB = **AD** (рис.1.11);

Доказать: **BC** = **CD**;

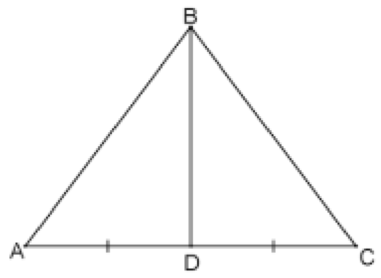


Рис.1.12

б) Дано:**AD**=**DC**; **BD**$\perp$**AC**

(рис.1.12);

Доказать: **AB**=**BC***;*

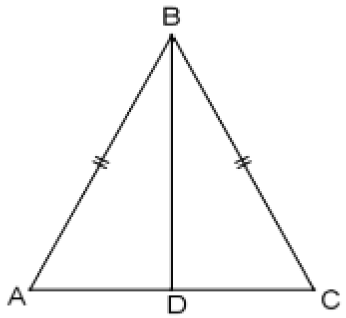


Рис.1.13

в) Дано: **BD** –биссектриса $\angle$**B;**

AB=**BC** (рис.1.13);

Доказать: **AD**=**DC**; $\angle$**BDC**=90°.

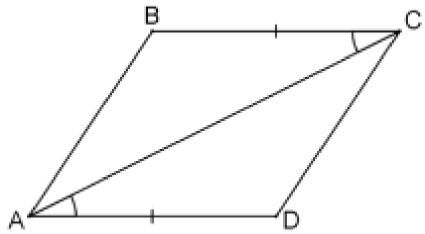


Рис.1.14

г) Дано: **BC**=**AD**;

$\angle$**BCA**=$\angle$**CAD** (рис.1.14);

Доказать: $\angle$**ABC**= $\angle$**CDA.**

Задание 6.

1. На рисунке точка **O** — середина отрезков **AB** и **PT**. Докажите, что Δ**AOT** = Δ**BOP** (рис.1.15).

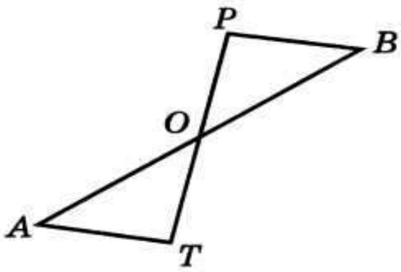


Рис.1.15

Доказательство:

1)**AO** =_____ , **OT** =_____, так как по условию задачи точка **O** — середина отрезков ___ и ___;

2)∠**AOT** =_____, так как эти углы вертикальные.

3)Итак, **AO** = **OB**, **OT** =____, ∠**AOT** =_____ , следовательно, Δ**AOT**=____(по двум сторонам и _____________________________).

2. На рисунке точка **O** — середина отрезка **AB**, **AT** = **BP**, ∠**OAT**=∠**OBP**. Докажите, что точка **O** — середина отрезка **PT** (рис.1.15).

Доказательство:

1)**AO** = **OB**, так как точка **O** — середина отрезка _______________;

2)Δ**AOT**=______, так как **AO** =____ , **AT** =____ , ∠**OAT** =_____(по двум сторонам _______________________________________).

Поэтому **OT** =______, т. е. точка **O** — середина__________.

Задание 7.

1. Верно ли условие задачи (рис.1.16):

дано: **CB**=$\mathbf{C_1B_1}$; ∠$\mathbf{B_1}$=∠**C**; $\mathbf{C_1A}$=**AB**.

доказать: Δ**ABC**=Δ$\mathbf{AB_1C_1}$.

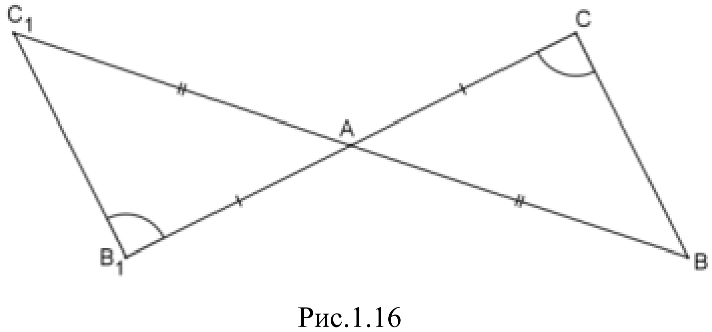


Рис.1.16

2. Решите задачи и решение оформите в тетради:

а. *Дано*: **AE**= **AB**; **AC** = **AD** (рис.1.17);

Доказать: **BC** =**DE**.

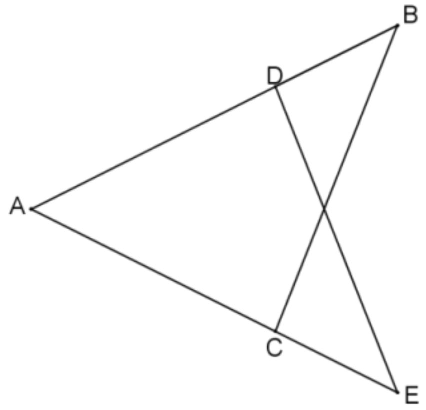


Рис.1.17

б. На сторонах равностороннего Δ**ABC** отложены, как указано на чертеже, равные отрезки **AD**, **CF**, **BE** и точки **D**, **E**, **F** соединены отрезками пряных. Докажите, что Δ**DEF** – равносторонний (рис.1.18).

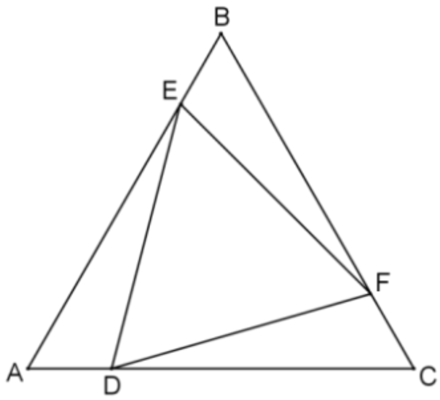


Рис.1.18

в. На чертеже **AB**=**BC**; **BD**=**BF**; ∠1=∠2. Найти на этом чертеже равные треугольники (рис.1.19).

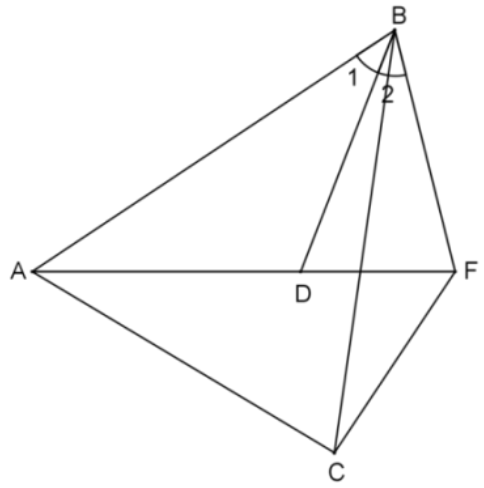


Рис.1.19

г. На сторонах угла **BAC** отложены равные отрезки **AM** и **AN** . Произвольная точка **D** – биссектриса этого угла – соединена с точками **M** и **N** . Докажите, что **DM=DN** (рис.1.20).

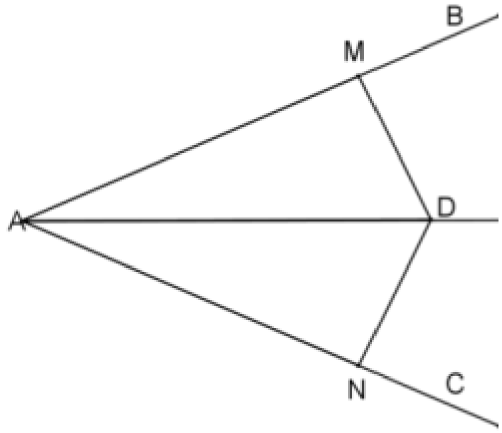


Рис.1.20

Задание 8.

Постройте чертеж и решите задачи с практическим содержанием.

1. Постройте треугольник по 2-м сторонам, равным 6,4 см и 4,6 см и углу межу ними, равному 68 °. Из вершины угла в 68° провести высоту треугольника и измерить ее.

2. Мимо 2-х поселков проходит шоссе. На нем нужно сделать остановку автобуса для жителей поселков. Где вы предложите ее сделать. Сначала подумайте, из каких соображений выбрать место для остановки.

Задание 9.

Рассмотрите блок- схему решения задачи и оформите решение в тетради.

Дано:Δ**AOB**=Δ **COD**(рис.1.21)

Доказать: Δ**BOC**=Δ**DOA.**

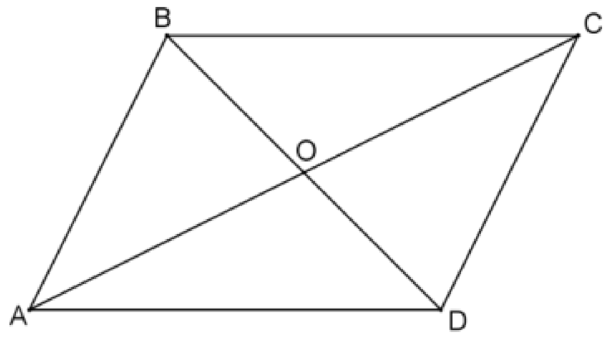
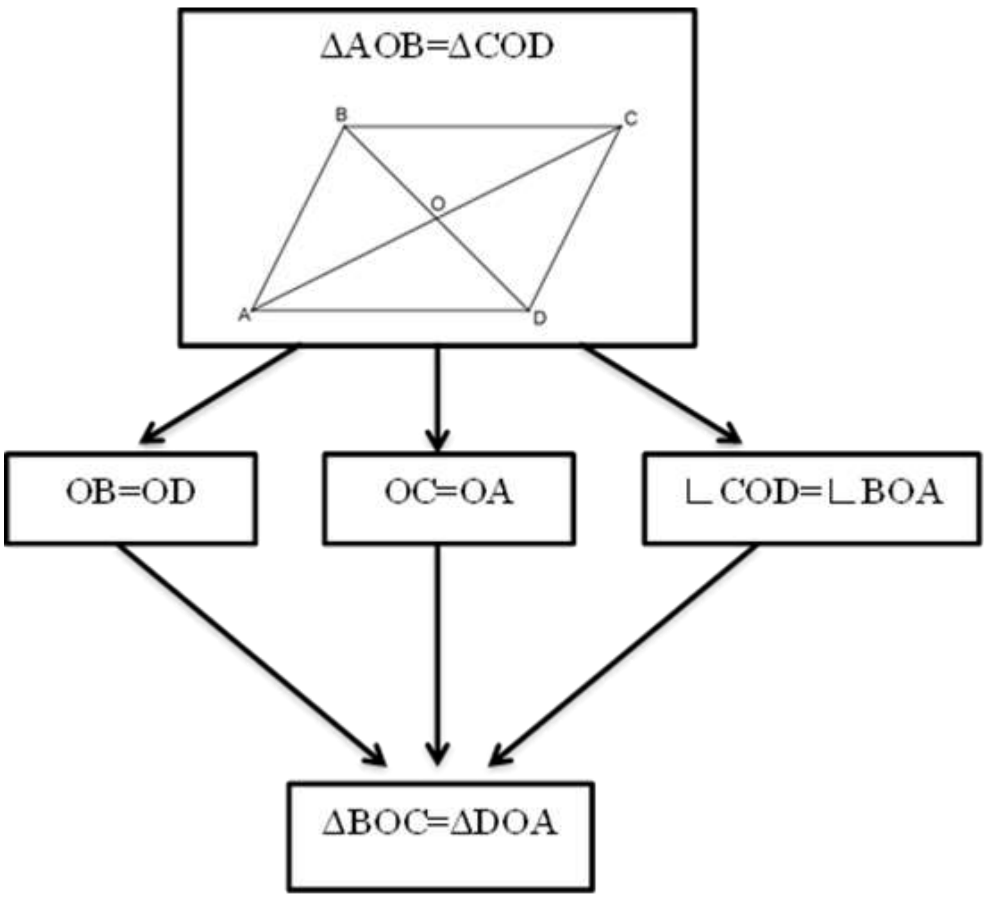


Рис.1.21

Блок-схема решения:



Самостоятельная работа.

Вариант 1.

1. Назовите треугольники, равные Δ**ABC** (рис.1.22):

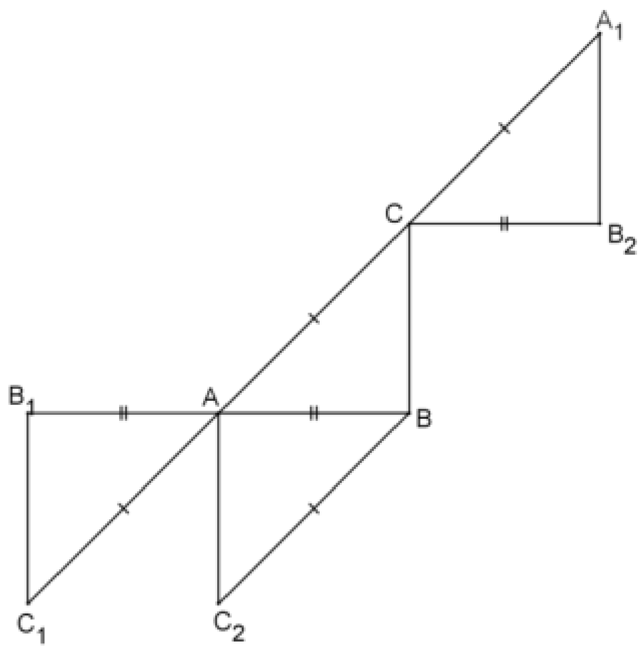


Рис.1.22

2. На рисунке**AC**=**DK**; **BC**=**DE**; ∠**BCK**=∠**ADE**. Докажите, что Δ**ABC**=Δ**KED** (рис.1.23).

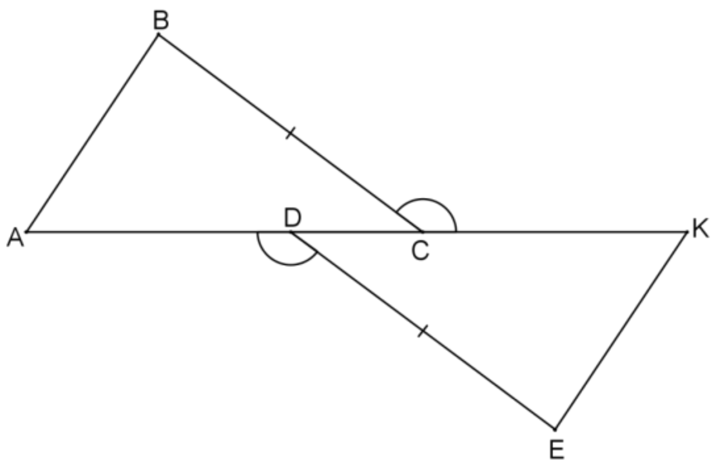


Рис.1.23

Вариант 2.

1. Назовите треугольники, равные Δ**ABC** (рис.1.24):

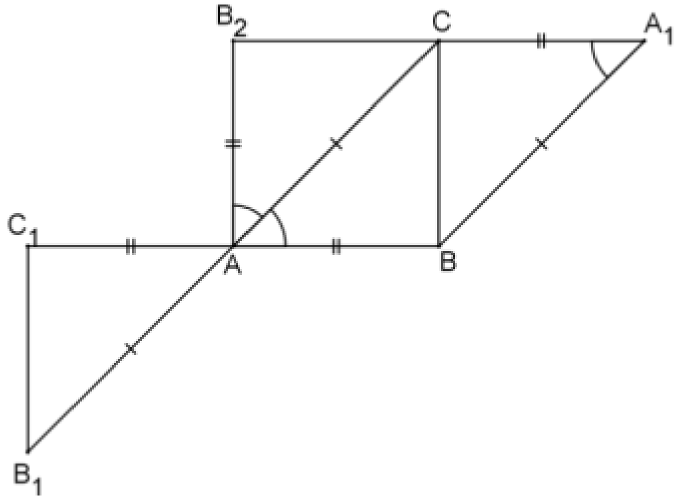


Рис.4.1.24

2. Дано: **AD**=**DB**; ∠1=∠2. Доказать, что **AC**=**CB** (рис.1.25).

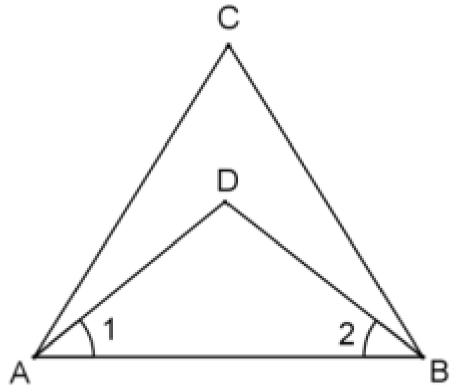


Рис.1.25

§2. Второй признак равенства треугольников.

Ответьте на вопросы:

1. Что называется лучом?
2. Два треугольника равны, если ...
3. Два отрезка называются равными, если ...
4. Два угла называются равными, если ...

Задание 1.

Сформулируйте первый признак равенства треугольников. Сделайте чертеж и докажите теорему.

Докажите равенство треугольников (рис.2.1).

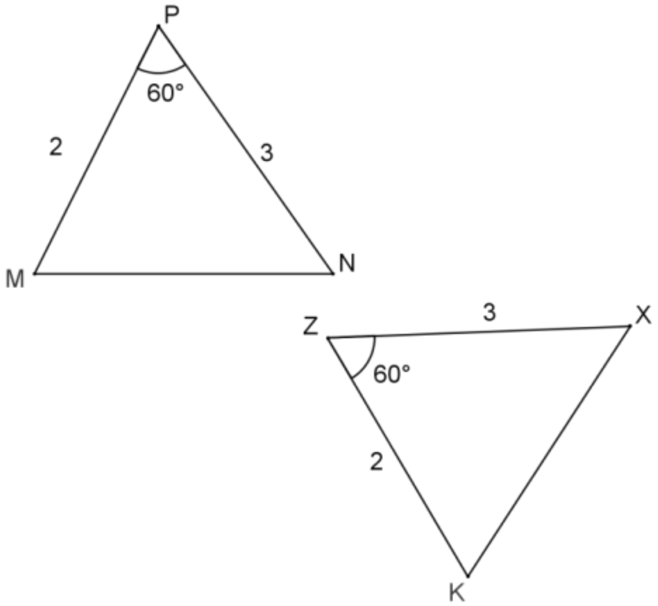


Рис.2.1

Ответьте на вопросы:

а) по каким трем соответствующим элементам равны треугольники?

б) какой признак использовали при доказательстве?

Задание 2.

Прямые **AC** и **BC** пересекаются в точке **C**, а прямые **AC$_1$** и **BC$_1$** – в точке **C$_1$** . Что можно сказать о расположении точек **C** и **C$_1$** , если прямые **AC** и **AC$_1$** совпадут и прямые **BC** и **BC$_1$** совпадут?

ИЗУЧЕНИЕ НОВОГО МАТЕРИАЛА

1. В учебнике самостоятельно прочитайте второй признак равенства треугольников.
2. Сделайте чертеж в тетради.
3. Запишите в тетради: что дано, что доказать.
4. Внимательно прочитайте доказательство, сравните его с доказательством первого признака равенства треугольников.

ОТВЕТЬТЕ НА ВОПРОСЫ:

1. Каков план доказательства?
2. В каком месте доказательства использованы данные условия теоремы?

3. Какие аксиомы, теоремы, определения были использованы при доказательстве?

4. В каком месте доказательства использовали аналогию?

5. Как оформить доказательство?

Задание 3.

1. Докажите равенство треугольников (рис.2.2):

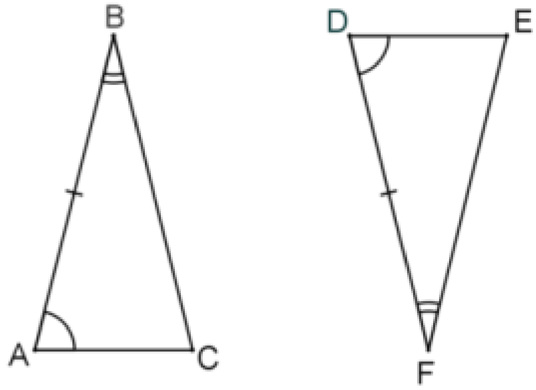


Рис.2.2

2. По данным чертежа найдите **DC** (рис.2.3).

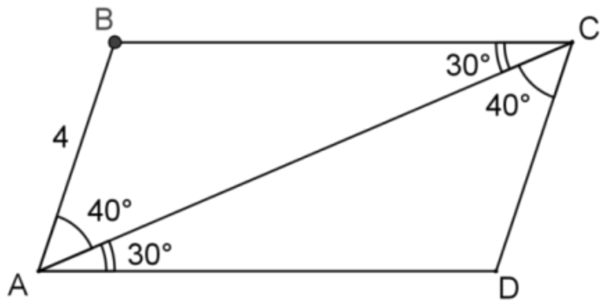


Рис.2.3

3. Найдите все стороны треугольников, если **BC** = 8 (рис.2.5).

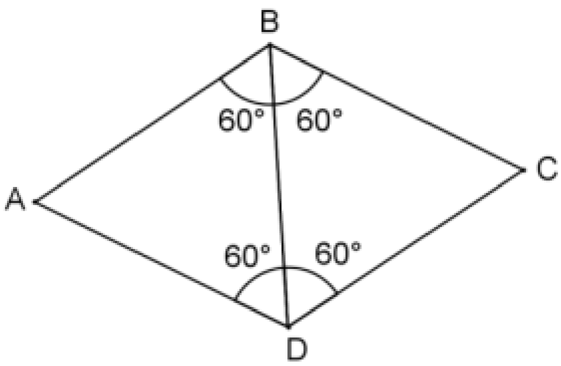


Рис.2.5

Задание 4.

1. Точки **A** и **C** лежат в разных полуплоскостях относительно прямой **BD**. Известно, что $\angle$**ABC**= $\angle$**CDA**=$\angle$**CDB**. Докажите: Δ**ADB**=Δ**CDB**. Чертеж постройте самостоятельно.

2. Назовите треугольники, равные треугольнику **ABC** , и укажите признак, по которому они равны (рис.2.6).

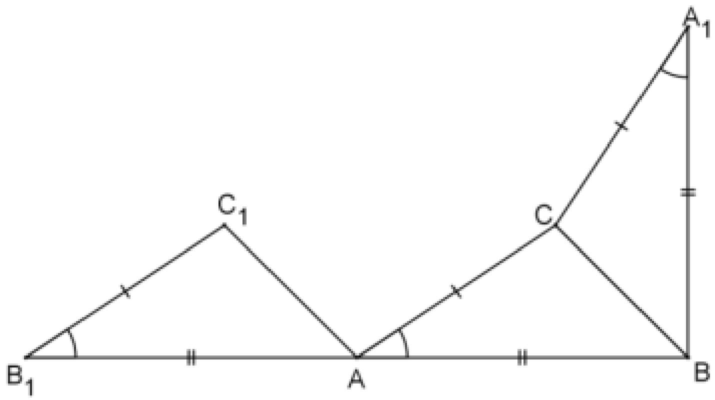


Рис.2.6

Лабораторная работа

Оборудование: линейка, карандаш, транспортир, резинка, бумага в клеточку.

Задание: Постройте треугольник по стороне **C** и двум углам **α** и **β**, прилежащим к этой стороне, если

а) C = 5 см, α= 30 °, β=50°

б) C = 5 см, α= 100 °, β= 30°

в) C = 4,8 см, α = 46 °, β=58 °.

Составьте алгоритм построения.

ПРИМЕНЕНИЕ 2 ПРИЗНАКА

Задание 5.

Решите задачи:

1. От стекла теплицы треугольной формы (рис.2.7) откололся один из его углов. Можно ли по сохранившейся части заказать стекольщику вырезать оконное стекло той же формы? Какие следует снять размеры?

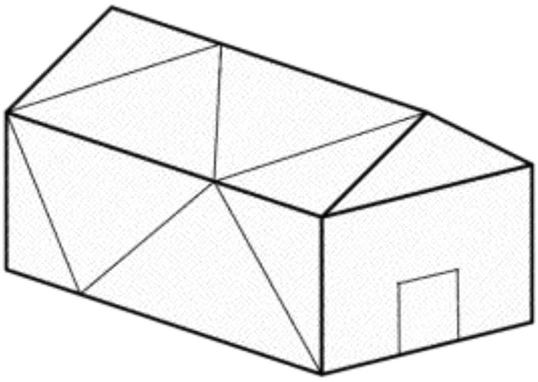


Рис.2.7

2. От пункта А к острову Б (рис.2.8) требуется провести телефонную связь. Как, не переплывая реку, найти необходимое количество (длину) телефонного кабеля?

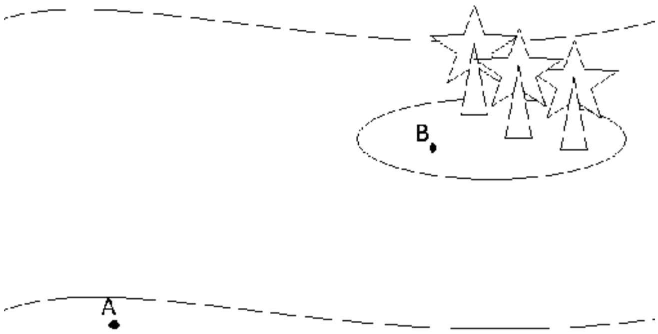


Рис.2.8

3. Придумайте задачи с практическим применением 2 признака. Творчески оформите задачи.

Задание 6 . ПРОВЕРЬТЕ СЕБЯ !

1. В прямоугольном треугольнике **ABC** один из углов равен 65 °, **BC**=7м, Δ**ABC**=$\Delta \mathbf{A_1B_1C_1}$. Найдите углы $\Delta \mathbf{A_1B_1C_1}$ и $\mathbf{B_1C_1}$.

2. Внутри равностороннего треугольника **ABC** взята точка **O**, которая соединена со всеми его вершинами (рис.2.9). Найти на чертеже равные треугольники, если $\angle$**OBC**=$\angle$**BCO**.

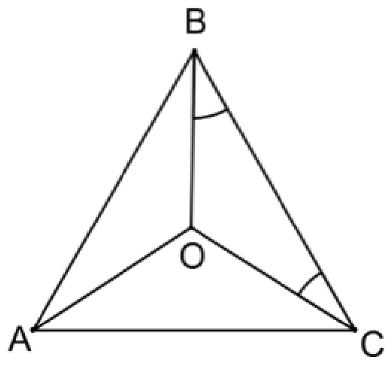


Рис.2.9

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА

Сделать все необходимые и достаточные измерения и установить, равны ли треугольники (рис.2.10).

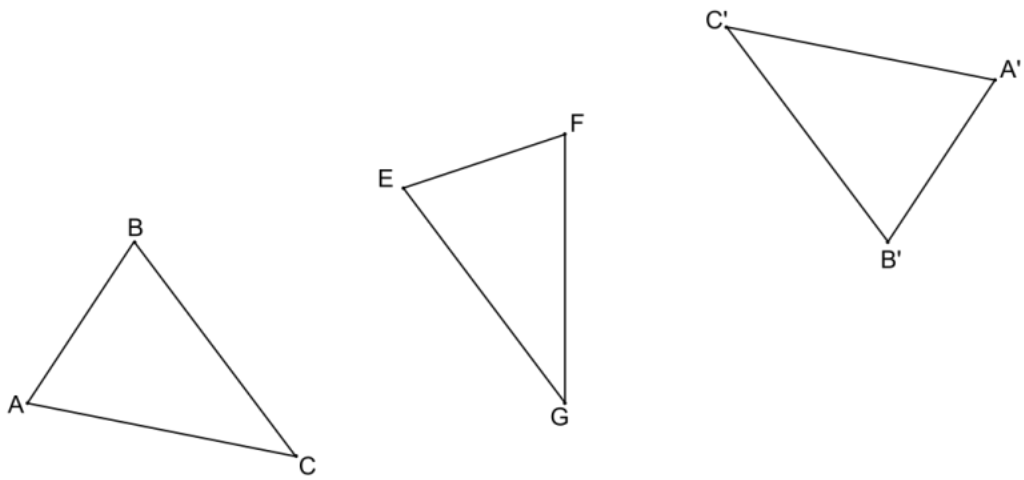


Рис.2.10

Задание 7.

Заполните пропуски.

Отрезки **AB** и **CD** пересекаются в точке **O**. Докажите равенство треугольников **ACO** и **DBO**, если известно, что угол **ACO** равен углу **DBO** и **BO**= **CO** (рис.2.11).

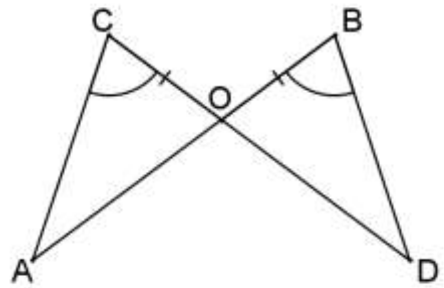


Рис.2.11

Дано: **AB** и **CD** в точке **O** пересекаются;

∠**ACO** = _____;

BO=___.

Доказать: _____ =Δ**DBO**.

Доказательство:

$$\begin{cases} \angle ACO = \_\_\_\_ \text{ (по условию)} \\ BO = \_\_\_ \text{ (по условию)} \\ \angle COA = \angle BOD \text{ (как \_\_\_\_углы)} \end{cases} \xrightarrow[\text{(по\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_)}]{} \Delta ACO = \Delta DBO$$

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1 вариант

1. Постройте треугольник **ABC**, если известно:

AB=4 см

α= 30°

ϒ = 65°

2 вариант

1.Постройте треугольник **ABC**, если известно:

AC = 5,6 см

α= 35°

β=75 °

2. Составьте задачу по рисунку и решите ее (рис.2.12 и рис.2.13).

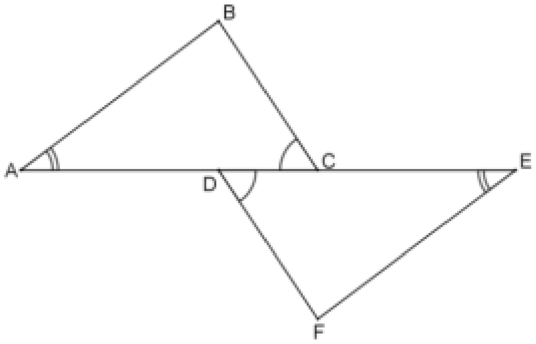


Рис.2.12

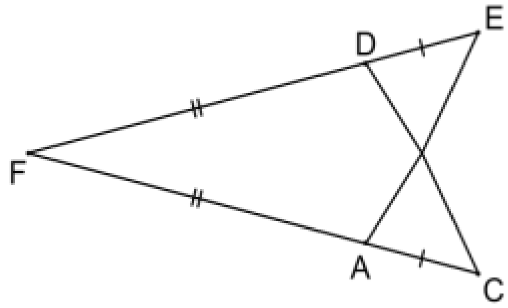


Рис.2.13

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Два треугольника **ABC** и **ABD** построены на общей стороне **AB**. Какие основные элементы этих треугольников должны быть равными, чтобы треугольники были равны? Сделайте чертеж.

2.Дано: **AB**⊥**BE**; **BE**⊥**DE** (рис.2.14).

а) Дополните условие наименьшим числом равенств между основными элементами треугольников, чтобы эти треугольники стали равными.

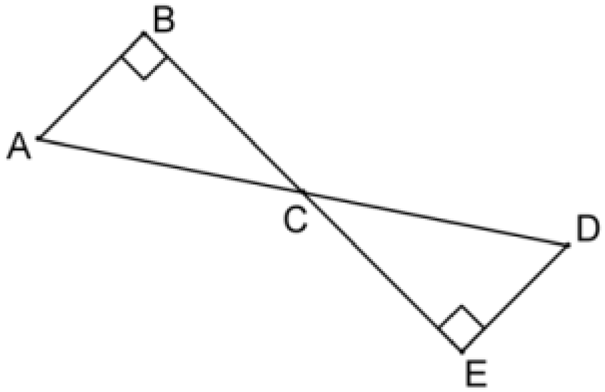


Рис.2.14

б) Соедините **A** с **E**, **B** с **D** и выявить на чертеже еще 3 пары равных треугольников (рис.2.14).

3. Дано: **BD**⊥**AC**; ∠1=∠2; **AK**=**DL**; **AO**=**DO** (рис.2.15).

Сколько пар равных треугольников изображено? Ответ поясните.

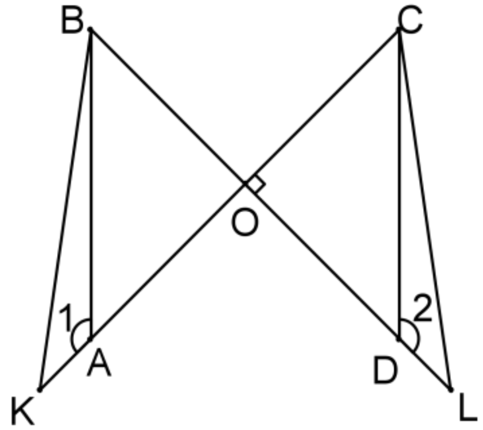


Рис.2.15

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

Оборудование: линейка, карандаш, транспортир, резинка, бумага в клеточку.

1 вариант .

Постройте треугольник по стороне 2 см, прилежащему к ней углу 40° и противолежащему ей углу 60^0 .

2 вариант.

Даны два угла треугольника $\angle$ **A** =55°, **AB**= 3 см, $\angle$**C** =45°. Постройте его третий угол.

Домашнее задание. Сделайте дома эту лабораторную работу, но уже другой вариант.

Задание 8.

Решите задачи по готовым чертежам:

1. *Дано*: **CO** =**OB**; $\angle$**OCD**=$\angle$**OBA** (рис.2.16);

   Доказать: **CD**=**AB**; **OD**=**OA**;

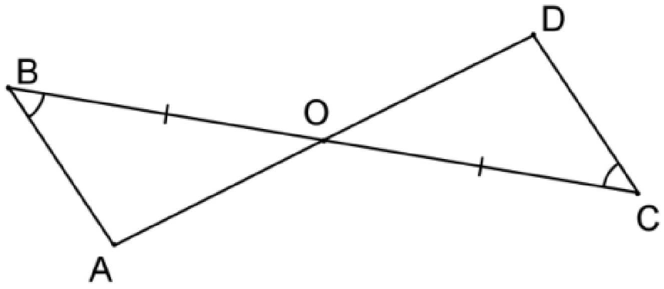


Рис.2.16

2. *Дано:*∠**AED**=∠**CAB**; **AB**=**AE** (рис.2.17);

Доказать: **CB**=**DE**;

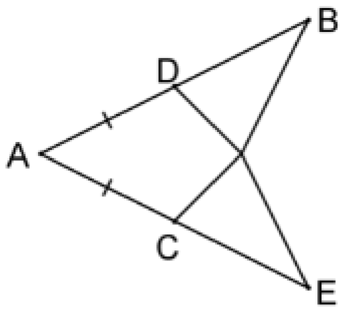


Рис.2.17

3. Дано: ∠**DBC**=∠**DAC**; **BO**=**AO** (рис.2.18);

Доказать: ∠**C**=∠**D**; **AC**=**BD**.

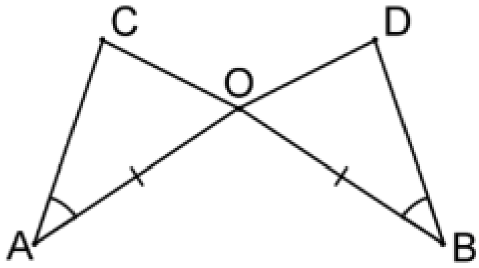


Рис.2.18

Задание 9.

Заполните пропуски:

Дано:∠**ABD**=∠**CDB**; ∠**ABC**=∠**CDA***;*

Доказать: ∆**ADB**=∆**CDB***;*

Доказательство:

1.По условию ∠**ABD**=∠_____

∠**ABC**=∠_____

$\angle$**ABC**$=\angle$_____

$\angle$**CDA**$=\angle$**CDB**$+\angle$_____ $=>\angle$_____$=\angle$_____

2.$\angle$**ABD**$=\angle$**CDB** *(по условию)*

$\angle$_____$=\angle$_____

*Сторона*_____ *– общая* => Δ_____=Δ_____.

Задание 10.

Начертите Δ**ABC** , стороны которого попарно не равны и отрезок $\mathbf{A_1B_1}$, равный отрезку **AB**. С помощью транспортира и линейки начертите Δ**ABC**=Δ$\mathbf{A_1B_1C_1}$. Сколько таких треугольников можно начертить?

Задание 11. Заполните таблицу, зная, что Δ**ABC**=Δ$\mathbf{A_1B_1C_1}$

AB	β	α	A_1B_1	β_1	α_1
5см	30°	45°			
		17°	60см	38°	
8см	94°				21°
6см				15°	105°
	47°		25см		53°

§3. Третий признак равенства треугольников.

Подготовительные упражнения

Задание 1. Вспомнив аксиомы и определения, заполните пропуски:

1. На каждом луче можно отложить отрезок, равный данному, и ...

2. Луч, который делит угол пополам, называется ...

3. Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется ...

4. Если у треугольника две стороны равны, то такой треугольник называется…

Задание 2.

1. Постройте равнобедренный треугольник, проведите медиану. Вспомните свойства этого отрезка.

2. В двух равнобедренных треугольниках **ABC** и **ADC** с общим основанием **AC** проведены медианы (рис.3.1). Докажите, что точки **B, O, D** лежат на одной прямой (используйте метод от противного).

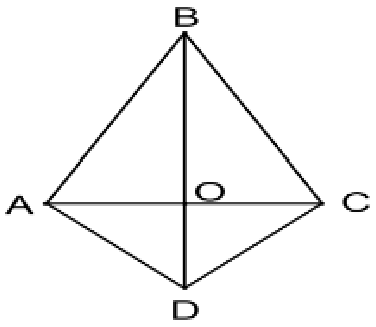


Рис.3.1

3. Треугольники $\mathbf{ACC_1}$ и $\mathbf{BCC_1}$– равнобедренные. Могут ли они располагаться так, как указано на рисунке 3.2?

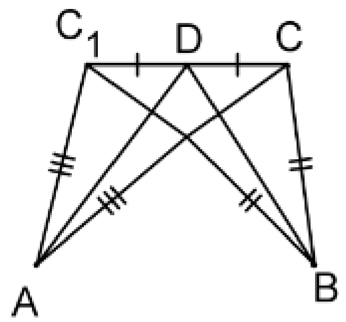


Рис.3.2

ЛАБОРАТОРНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА

Постройте Δ**ABC** по его сторонам: **AB**=3,5 см,

AC=4 см, **BC**=3 см.

1. Постройте отрезок **AB**.
2. Постройте окружность с центром в точке **A** и радиусом 4 см.
3. Постройте окружность с центром в точке **B** и радиусом 3 см.
4. Одну из точек пересечения обозначьте **C** и соедините ее с точками **A** и **B**.

Сколько таких треугольников можно построить? Что можно о них сказать? Сделайте вывод.

Задание 3.

1. Прочитайте в учебнике третий признак равенства треугольников.

2. Сделайте чертеж в тетради

3. Запишите, что дано, что нужно доказать, идею доказательства.

4. Какие аксиомы, определения и теоремы требуются для доказательства?

5. Сравните план доказательства третьего и второго признаков, что у них общего и чем они отличаются?

Задание 4.

Практическая работа.

1. а) Начертите треугольник **ABC**, у которого **AB** =5 см, ∠**A**=∠**B**=50°. Измерьте стороны **AC** и **BC**.

б) Что можно сказать о треугольниках?

2. Постройте четырехугольник, равный данному, используя признак равенства треугольников по трем сторонам.

Задание 5.

Составьте по рисункам 3.3 и 3.4 задачу и творчески оформите ее решение:

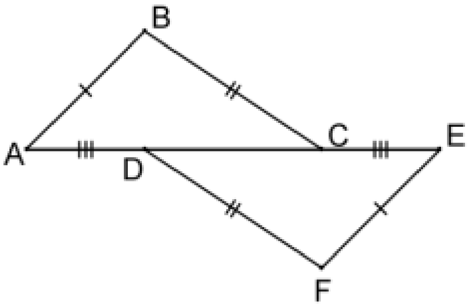


Рис.3.3

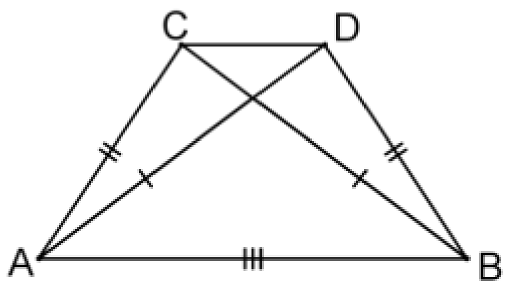


Рис.3.4

Задание 6.

Решите задачи по готовым чертежам:

1. **AD**=**CF**; **AB**=**EF**; **BC**=**DE**.

Докажите, что ∠1=∠2 (рис.3.5).

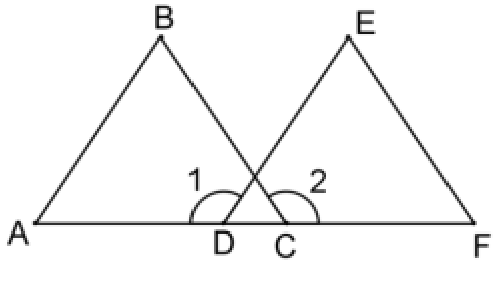


Рис.3.5

2. Треугольники **ABC** и **ABC_1** равнобедренные с общим основанием **AB.** Докажите, что Δ**ACC_1**=Δ**BCC_1**(рис.3.6).

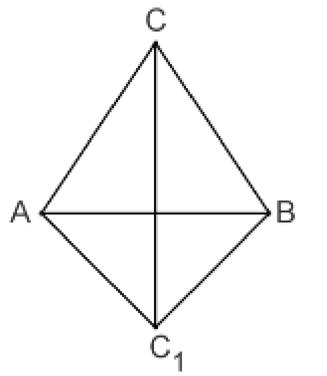


Рис.3.6

Задание 7.

Заполните пропуски:

У треугольников **ABC** и **$A_1B_1C_1$** **AB**=**A_1B_1**, **AC**=**A_1C_1**, $\angle$**C**=$\angle$**C_1**=90°. Докажите, что Δ**ABC**=Δ**$A_1B_1C_1$**.

Дано: Δ**ABC** и Δ**$A_1B_1C_1$**; **AB**=___; **AC**=___; $\angle$**C**=____=_____.

Доказать: Δ**ABC**=_____.

Доказательство:

На (**AC**) отложим точку **D** так, что **CD**=**AC**. Δ**ABC**=Δ**BCD**, так как:

1) _____ – общая сторона;

2) **AC**=**CD**– по построению;

3) $\angle$**ACB**=_______ => по _____ признаку **AB**=_____.

Аналогично для **$A_1B_1C_1$** ____________________________________

____

Имеем, что:

1) **AB**=___, так как _______________________;

2) **BD**=___, так как _______________________;

3) **AD**=___, так как _______________________;

Тогда по третьему признаку треугольников: Δ**ABD**=_____.

Таким образом, имеем в Δ**ABC** и Δ**$A_1B_1C_1$**:

AB=___

AC=___ => Δ_____=Δ______.

$\angle$**A**=___

Задание 8.

Заполните таблицу, если известно, что $\Delta \mathbf{ABC} = \Delta \mathbf{A_1B_1C_1}$.

	AB	BC	CA	∠A	∠B	∠C	A_1B_1	B_1C_1	C_1A_1	∠A_1	∠B_1	∠C_1
а	см	5см	3см	35°	23°	122°						
б	21м		37м	55°	91°			30м				34°
в		4м				60°	4м		4м	60°	60°	
г		45мм	65мм		90°							45°

Задание 9.

Решите дополнительные задачи:

1. Равные отрезки **AB** и **CD** пересекаются посередине каждого из них. Докажите равенство углов **ACB** и **DBC**. Сделайте чертеж.

2. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане исходящей из одной вершины. Сделайте чертеж.

3. Докажите равенство треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углам, которые образует с ней медиана. Сделайте чертёж.

4. Точки **A, B, C, D** лежат на одной прямой (рис.3.7). Докажите, что если $\Delta \mathbf{ABE_1} = \Delta \mathbf{ABE_2}$, то $\Delta \mathbf{CDE_1} = \Delta \mathbf{CDE_2}$.

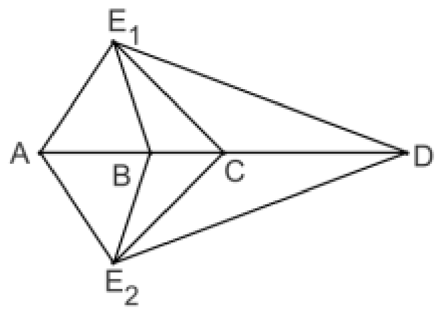


Рис.3.7

5. У равных треугольников **ABC** и $\mathbf{A_1B_1C_1}$ из вершин **B** и $\mathbf{B_1}$ проведены биссектрисы **BD** и $\mathbf{B_1D_1}$. Докажите равенство треугольников **CBD** и $\mathbf{C_1B_1D_1}$.

Сделайте чертеж. Решите задачу разными способами. Творчески оформите решение.

Задание 10.

Ниже приведена задача и схема с пятью ее решениями (1–5). Рассмотрите каждое решение (рис.3.8). Какие признаки равенства треугольников в них использованы? Составьте план одного из решений и творчески оформите его.

*Треугольники **ABC** и **BAD** равны. Их стороны **AD** и **BC** пересекаются в точке **O**. Докажите, что треугольники **AOC** и **BOD** тоже равны.*

Схема решений:

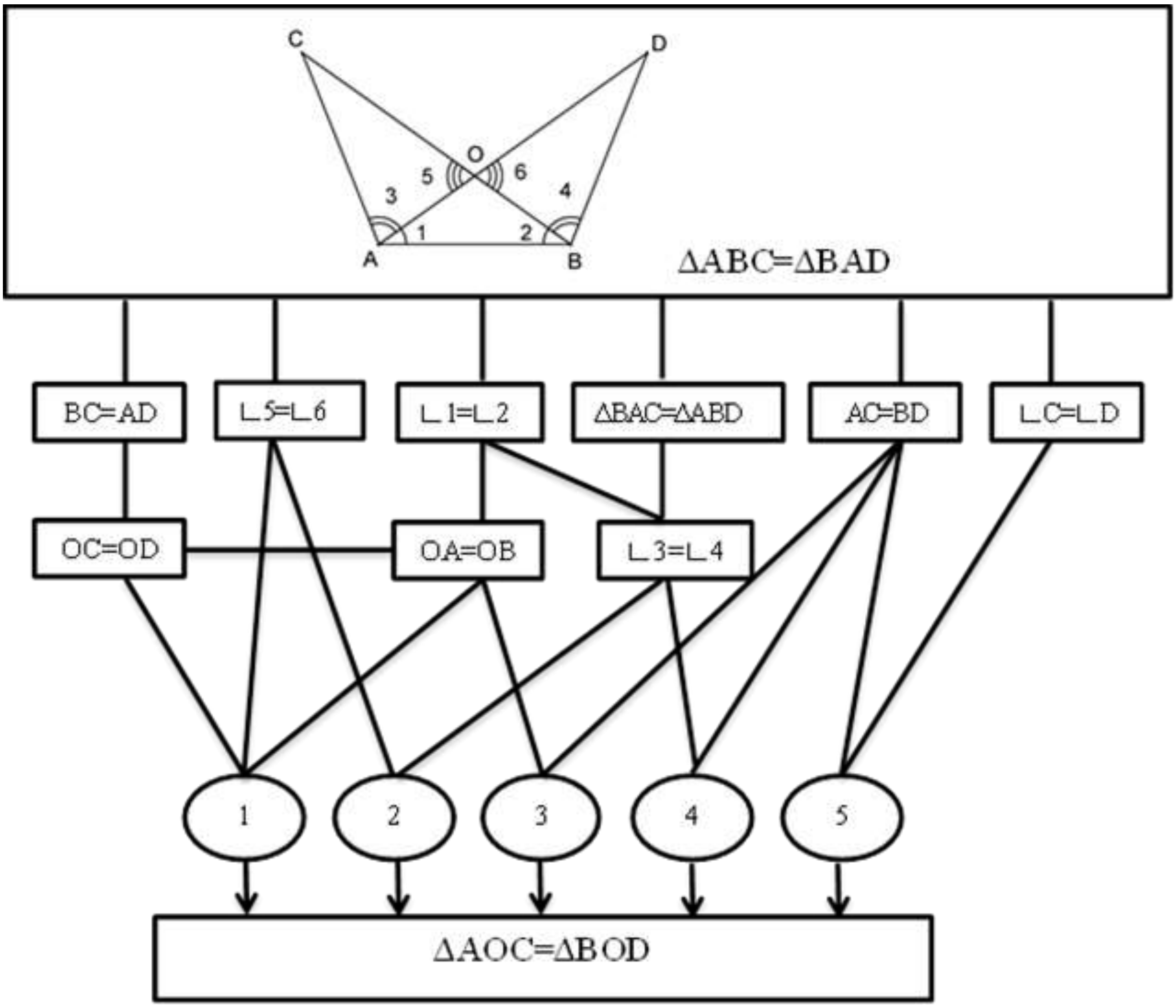


Рис.3.8

§4. Дополнительные задачи

п1. Задачи с практическим содержанием

Во многих практических и теоретических случаях удобно использовать знакомые нам признаки равенства треугольников.

ЗАДАЧА 1. От оконного стекла треугольной формы откололся один из его уголков. Можно ли по сохранившейся части заказать стекольщику вырезать отколовшийся кусок стекла? Какие следует снять размеры? Построить этот треугольник с помощью циркуля и линейки.

Учащиеся работают в группах. Каждая группа оформляет решение. Первая группа, которая решила задачу, защищает свое решение.

ЗАДАЧА 2. Столяру нужно заделать отверстие треугольной формы. Сколько размеров и какие он должен снять, чтобы изготовить латку? Что он должен измерить, если отверстие имеет форму: а) прямоугольного треугольника, б) равностороннего треугольника, в) равнобедренного треугольника, г) разностороннего треугольника.

Всем учащимся раздаются 4 предложенных вида треугольника. Устно необходимо выяснить какие размеры необходимо снять, чтобы изготовить латку.

ЗАДАЧА 3. Мама купила 1 метр ткани шириной 1 метр на платок двум своим дочерям. Разделите этот кусок ткани на две равные части, сделайте так, чтобы дочери не поругались.(платки были равными) и докажите правильность своих действий.

Изменится ли что-нибудь, если кусок ткани будет иметь форму:

- Прямоугольника,
- Ромба,
- Параллелограмма.

ЗАДАЧА 4.Три поселка В, С, Д расположены так, что С находится в 7 км к юго-западу от поселка В, а поселок Д – в 4 км к востоку от В. Три других поселка А, К, М расположены так, что поселок К находится в 4 км к северу от М, а поселок А – в 7 км к юго-востоку от М. Сделайте чертеж и докажите, что расстояние между пунктами С и Д такое же, как между пунктами К и А.

ЗАДАЧА 5. В школьной мастерской изготовлены из проволоки четыре стержня длиной 4,7,10,13 см. Соединяя концами три стержня из четырех, выясните, из каких трех стержней можно составить треугольник, а из каких нельзя. Объясните ваши выводы.

п2. Задачи на применение признаков равенства треугольников из текстов ГИА

*Задача 1.*В окружности с центром O проведены две равные хорды AB и CD. На эти хорды опущены перпендикуляры OK и OL соответственно (рис.4.1). Докажите, что OK и OL равны.

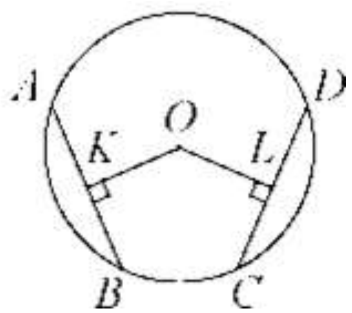


Рис. 4.1

Задача 2. В параллелограмме ABCD точка E — середина стороны AB (рис.4.2). Известно, что EC = ED. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

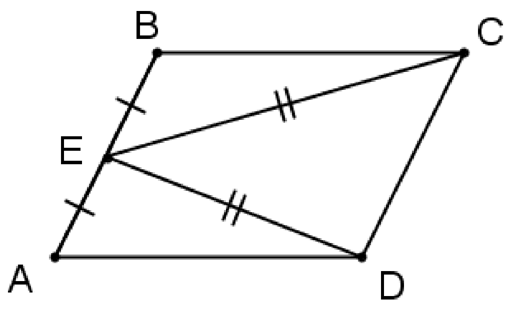


Рис. 4.2

Задача 3. Дана равнобедренная трапеция ABCD. Точка M лежит на основании AD и равноудалена от концов другого основания (рис.4.3). Докажите, что M- середина основания AD.

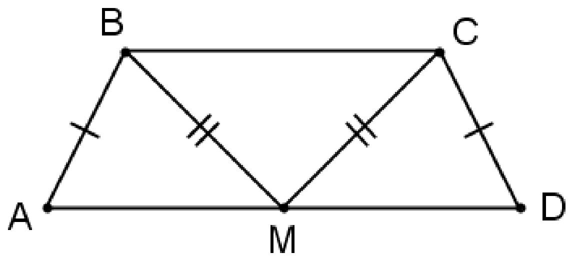


Рис. 4.3

Задача 4. Середина M основания AD трапеции ABCD равноудалена от концов другого основания (рис.4.4). Докажите, что трапеция ABCD равнобедренная.

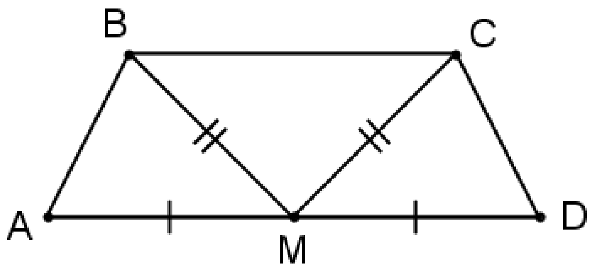


Рис. 4.4

Задача 5. Середины сторон параллелограмма являются вершинами ромба (рис.4.5). Докажите, что данный параллелограмм - прямоугольник.

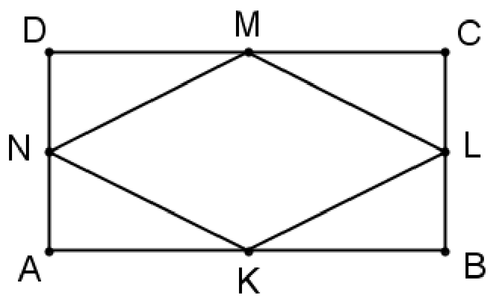


Рис. 4.5

Задача 6. Середины сторон параллелограмма являются вершинами прямоугольника (рис.4.6). Докажите, что данный параллелограмм – ромб.

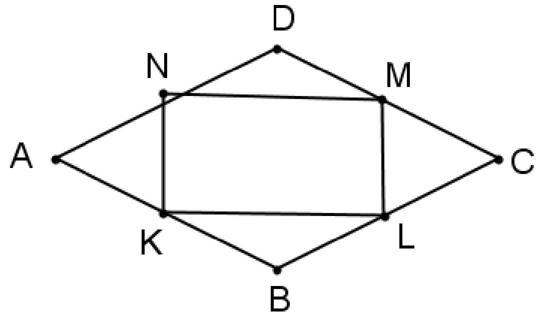


Рис. 4.6

Задача 7. Докажите, что биссектрисы углов при основании равнобедренного треугольника равны (рис 4.7).

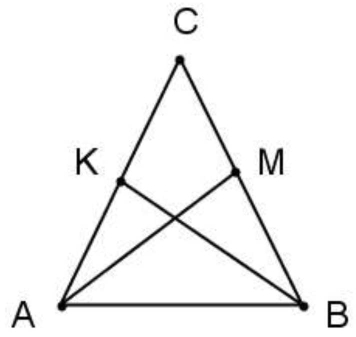


Рис. 4.7

Задача 8. В параллелограмме проведены биссектрисы противоположных углов (рис.4.8). Докажите, что отрезки биссектрис, заключенные внутри параллелограмма, равны.

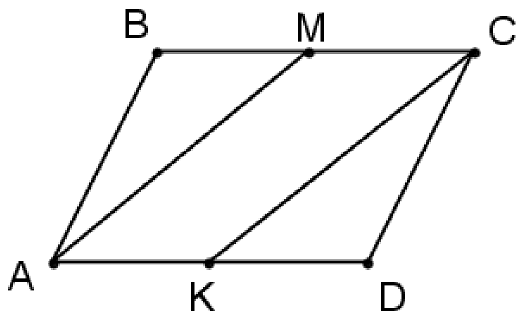


Рис. 4.8

Задача 9. Докажите, что медианы, проведенные к боковым сторонам равнобедренного треугольника равны (рис.4.9).

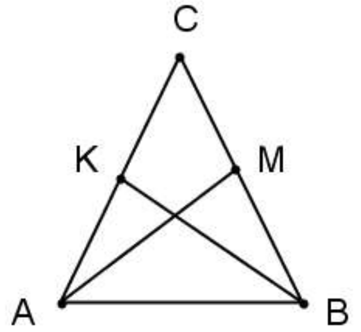


Рис. 4.9

Задача 10. Из противоположных углов параллелограмма проведены отрезки к серединам противолежащих сторон (рис.4.10). Докажите, что эти отрезки равны.

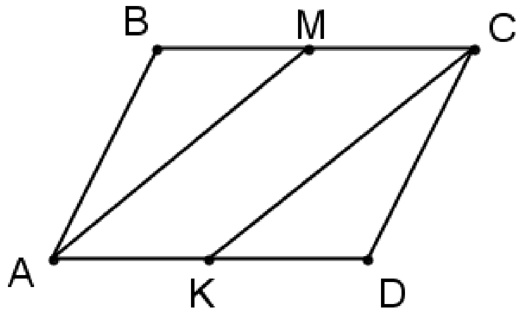


Рис. 4.10

Задача 11. Два квадрата имеют общую вершину (рис.4.11). Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки АВ и СЕ равны.

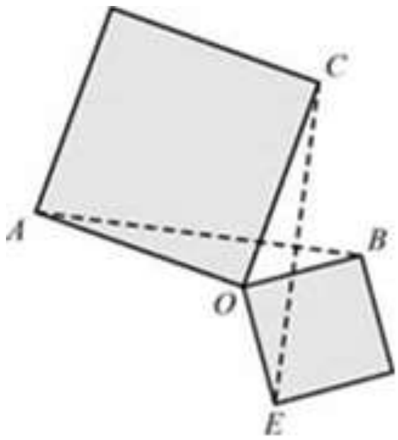


Рис. 4.11

Задача 12. Найдите отношение двух сторон треугольника, если его медиана, выходящая из их общей вершины, образует с этими сторонами углы в 30° и 90° (рис.4.12).

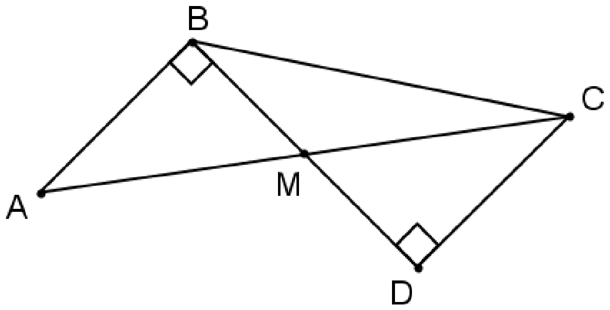


Рис. 4.12

Задача 13. Два равносторонних треугольника имеют общую вершину (рис.4.13). Докажите, что отмеченные на рисунке отрезки AB и CD равны.

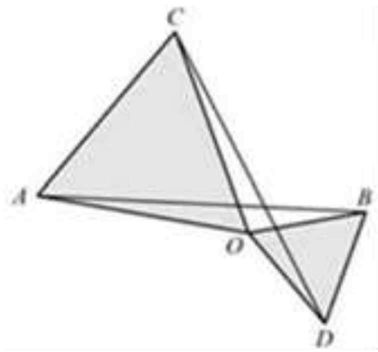


Рис. 4.13

Задача 14. В параллелограмме A BCD точка M— середина стороны AB (рис.4.14). Известно, что MC = MD. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

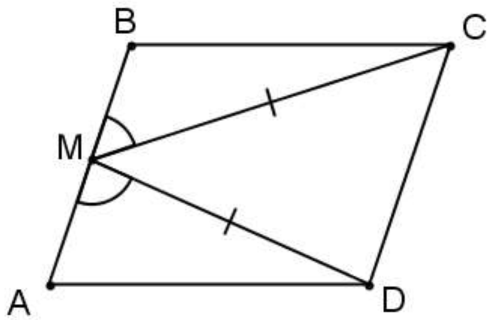


Рис. 4.14

Задача 15. На рисунке ABCD – параллелограмм (рис.4.15). На его сторонах отмечены точки P, K,M и N так, что BK = ND , BP = MD. Докажите, что четырехугольник PKMN- параллелограмм.

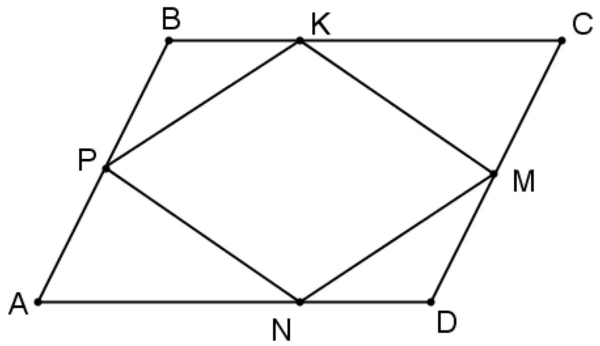


Рис. 4.15

п3. Задачи на доказательство

Выясните, верны ли следующие утверждения. Если да, докажите, если нет, приведите контр пример

Задача 1. Два треугольника равны, если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника.

Задача 2.Два треугольника равны, если две стороны и высота, опущенная на одну из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте другого треугольника.

Задача 3.Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на эту сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 4. Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 5. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, прилежащую к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 6. Если сторона и две высоты, опущенные на две другие стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задача 7. Если две стороны и медиана, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задача 8. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к этой стороне, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 9. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к стороне, противоположной данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 10. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу, и медиана, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и медиане другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 11. Если угол и две медианы, проведенные к его сторонам, одного треугольника соответственно равны углу и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задача 12. Ели две стороны и биссектриса, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе другого треугольника, то такие треугольники равны.

Задача 13. Если угол, сторона, прилежащая к этому углу и биссектриса, проведенная к другой стороне, прилежащей к данному углу, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и биссектрисе другого треугольника, то эти треугольники равны.

Задача 14. Два треугольника равны, если сторона, биссектриса и высота, проведенные к этой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, биссектрисе и высоте другого треугольника.

Задача 15. Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

Рекомендации к решению задач

§4. Дополнительные задачи

п1. Задачи с практическим содержанием

ЗАДАЧА 1. *Анализируя условие задачи, ее формулировку можно записать так: построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам. Такая задача хорошо знакома учащимся и не вызовет затруднений.*

ЗАДАЧА 2. *Воспользовавшись признаками равенства треугольников, можно понять, какие три размера треугольника надо снять.*

а) прямоугольный – 2 катета,

б) равносторонний- 1 сторону,

в) равнобедренный – боковую сторону и основание,

г) разносторонний- 3 стороны.

ЗАДАЧА 4. *Договоримся, что на карте север направлен вверх, юг- вниз, восток- направо, запад- налево. Необходимо эти поселки расположить на карте и доказать, что треугольник ВДС равен треугольнику АМК. Они равны по двум сторонам (по построению) и угол СВД равен углу КМА и равен 135 градусам. Следовательно, ДС=АК..*

ЗАДАЧА 5. *Решение:*

- *4,7,10*
- *4,10,13*
- *7,10,13*

Треугольник можно построить по трем сторонам только в том случае, если сумма двух его сторон строго больше наибольшей стороны.

п2. Задачи на применение признаков равенства треугольников из ГИА

Задача 1. *Решение:*

Проведём радиусы OA, OB, OC, OD. Треугольники AOB и COD равны по трём сторонам. OK и OL — их высоты, проведённые к равным сторонам, следовательно, они равны как соответственные элементы равных треугольников.

Задача 2.*Доказательство:*

Треугольники BEC и AED равны по трём сторонам.

Значит, углы CBE и DAE равны. Так как их сумма равна 180°, то углы равны 90°. Такой параллелограмм — прямоугольник.

Задача 3.*Доказательство:*

Треугольник BMC равнобедренный. Поэтому ∠CBM = ∠BCM.

В равнобедренной трапеции ∠ABC = ∠DCB.

Отсюда следует, что ∠ABM = ∠DCM. Значит, треугольники BMA и CMD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, AM = MD.

Задача 4. *Доказательство:*

Треугольник BMC равнобедренный. Поэтому ∠CBM = ∠BCM. По свойству параллельных прямых ∠CBM = ∠BMA и ∠BCM = ∠CMD. Следовательно, ∠BMA = ∠CMD.

Значит, треугольники BMA и CMD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, AB = CD.

Задача 5. *Доказательство:*

Пусть точки К, L, M, N - середины сторон AB, BC, CD, и DA параллелограмма ABCD соответственно (BL=CL т.к. L- середина BC; КВ-МС, т.к. AB=CD как противоположные стороны параллелограмма, а К и М - середины этих сторон; KL-ML как стороны ромба).

Тогда треугольники KBL и LCM равны по трем сторонам. Это означает, что угол KBL равен углу MCL . Но эти углы в сумме дают 180°, поэтому каждый из них равен 90°. Таким образом, углы параллелограмма прямые. Значит, он прямоугольник.

Задача 6. *Доказательство:*

Пусть ABCD- данный параллелограмм, точки K,L,M, N - середины сторон AB, BC, CD и DA соответственно. KL- средняя линия треугольника ABC, поэтому отрезок KL параллелен диагонали AC. Аналогично, LM - средняя линия треугольника BCD, поэтому отрезок LM параллелен диагонали BD. По условию KLMN прямоугольник, следовательно, прямые KL и LM перпендикулярны. Но тогда перпендикулярны параллельные им диагонали AC и BD. Значит, ABCD - ромб.

Задача 7. *Доказательство:*

ΔABC; AB = CB; ∠ACK = ∠KC B = ∠MAC = ∠BAM .

Докажем, что AM = CK .

1) ΔACK = ΔCAM по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) AC -общая;

б) ∠KAC=∠MCA по свойству углов равнобедренного треугольника;

в) ∠ACK= ∠MAC по определению биссектрисы и равенству углов при основании равнобедренного треугольника.

2) KC = MA как соответствующие элементы равных треугольников.

Задача 8. *Доказательство:*

ABCD – параллелограмм AM – биссектриса ∠A, CK – биссектриса ∠C.

Докажем, что AM=CK.

1)ΔAMB = ΔCKD по стороне и двум прилежащим к ней углам:

а) AB=CD – по свойству противоположных сторон параллелограмма;

б)∠ABM=∠KDC по свойству противоположных углов параллелограмма;

в)∠BAM= ∠KCD по определению биссектрисы и равенству противоположных углов параллелограмма.

2) KC=MA как соответствующие элементы равных треугольников.

Задача 9. *Доказательство:*

Пусть в треугольнике ABC AB=CB, K и M середины сторон AB и BC соответственно.

Докажем, что AM = CK .

1) $\Delta ACK = \Delta CAM$ по 2 сторонам и углу между ними:

а) AC - общая сторона,

б) $\angle KAC = \angle MCA$ по свойству равнобедренного треугольника,

в) AK = CM , поскольку K и M середины равных сторон.

2) AM = CK как соответственные стороны равных треугольников.

Задача 10.*Доказательство.*

ABCD - параллелограмм,

M - середина BC, K– середина AD.

Докажем, что AM=CK.

1) $\Delta ABM = \Delta CKD$ по двум сторонам и углу между ними:

а) AB=CD – по свойству противоположных сторон параллелограмма;

б) BM=KD по свойству противоположных сторон параллелограмма и определению середины отрезка;

в) $\angle ABM=\angle KDC$ по свойству противоположных углов параллелограмма;

2) AM=CK.

Задача 11.*Доказательство:*

Пусть общая вершина квадратов - точка O. $AO\perp OC$ и $BO\perp OE$. Следовательно, $\angle AOB = \angle COE$. Тогда треугольники AOB и COE равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, AB = CE как соответствующие стороны равных треугольников.

Задача 12.*Решение:*

Пусть в треугольнике ABC отрезок BM служит медианой, при этом $\angle AMB= 90°$, $\angle CBM = 30°$. Возьмем на продолжении отрезка BM точку D так, что BM=MD. Тогда треугольники ABM и CDM равны по двум сторонам и углу между ними.

Значит, ∠BDC = 90°. Поэтому треугольник BDC - прямоугольный с углом CBD , равным 30°. Следовательно, $\frac{AB}{BC} = \frac{CD}{BC} = \frac{1}{2}$.

Задача 13.*Доказательство:*

Рассмотрим треугольники AOB и COD.

В них AO = CO, BO = OD и ∠AOB = ∠AOC+∠COB = 60° + ∠COB = ∠BOD + ∠COB = ∠COD. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому AB = CD как соответствующие стороны равных треугольников.

Задача 14.*Доказательство:*

Пусть точка M- середина стороны AB параллелограмма ABCD- равноудалена от его вершин C и D. Тогда, треугольник CMD - равнобедренный, поэтому ∠MCD = ∠MDC. Поскольку прямая CD параллельна стороне AB, то ∠BMC = ∠MCD и ∠AMD = ∠MDC как накрест лежащие. Таким образом, ΔBMC =ΔAMD по первому признаку равенства треугольников (∠BMC = ∠AMD, AM =MB, MD =MC).

Значит, ∠CBM = ∠DAM. Их сумма равна 180°, т.к. это два угла параллелограмма, прилежащие к одной стороне. Следовательно, ∠CBM = ∠DAM = 90 . По свойству параллелограмма углы BCD и CDA также прямые. Значит. ABCD- прямоугольник.

Комментарий: Равенство треугольников BMC и AMD может быть доказано иначе, например, но третьему признаку равенства треугольников.

Другое возможное доказательство:

Пусть точка O – середина CD. Четырехугольник OMBC является параллелограммом, поскольку его стороны OC и MB параллельны и равны. Треугольник MCD – равнобедренный, поэтому OM – его высота. Значит. OMBC– прямоугольник, следовательно, угол CBM – прямой.

Задача 15.*Доказательство.*

Треугольники BPK и DMN равны по двум сторонам и углу между ними т.к. BK = DN, BP = DM ∠B = ∠D) (по свойству параллелограмма).

Значит, стороны РК и MN равны.

BK = DN, значит, AN = КС.

BP = DM значит, АР = СМ.

∠А = ∠С (по свойству параллелограмма), значит, треугольники APN и КСМ равны но двум сторонам и углу между ними. Значит, сторона PNравна стороне КМ. Таким образом, в четырехугольнике PKMNпротивоположные стороны равны. Такой четырехугольник , по признаку параллелограмма, - параллелограмм.

п3. Задачи на доказательство

Задача 1. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим окружность и ее хорду AB (рис.4.15). С центром в точке A проведем другую окружность, пересекающую первую окружность в некоторых точках Cи C_1. Тогда в треугольниках ABCи ABC_1 AB– общая сторона, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

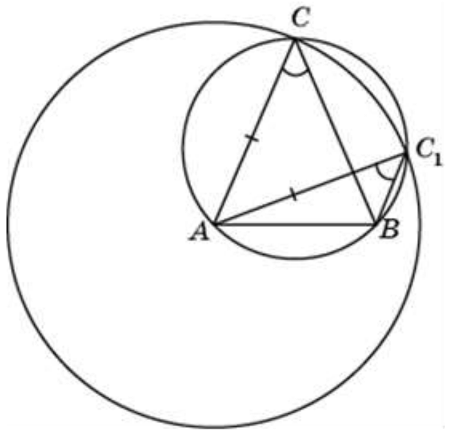


Рис. 4.15

Задача 2. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, высота CHравна высоте C_1H_1 (рис.4.16). Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

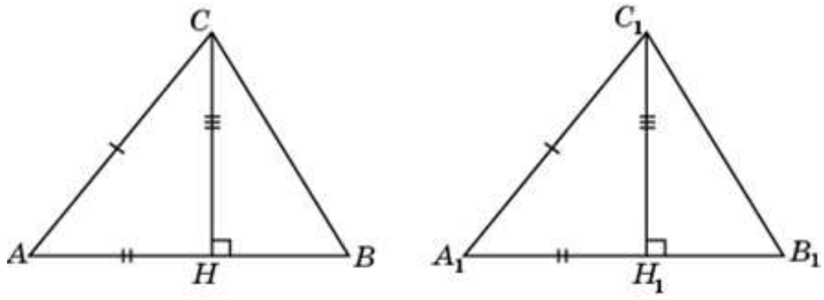


Рис. 4.16

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1 AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

Задача 3. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, высота CH равна высоте C_1H_1 (рис.4.17). Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

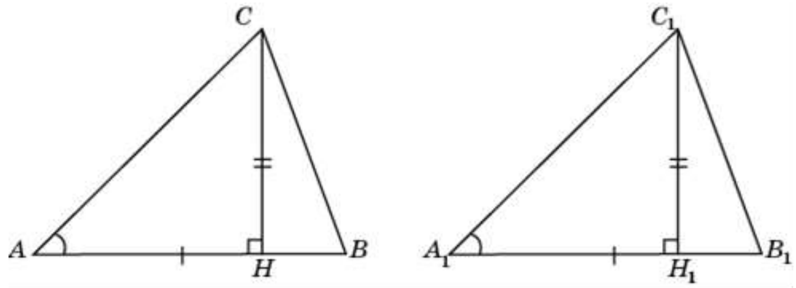


Рис. 4.17

Действительно, прямоугольные треугольники ACH и $A_1C_1H_1$ равны по катету и острому углу. Значит, $AC = A_1C_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1 AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Следовательно, эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними.

Задача 4. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle C = \angle C_1$, высота AH равна высоте A_1H_1 (рис.4.18). Докажем, что треугольники ABCи $A_1B_1C_1$ равны.

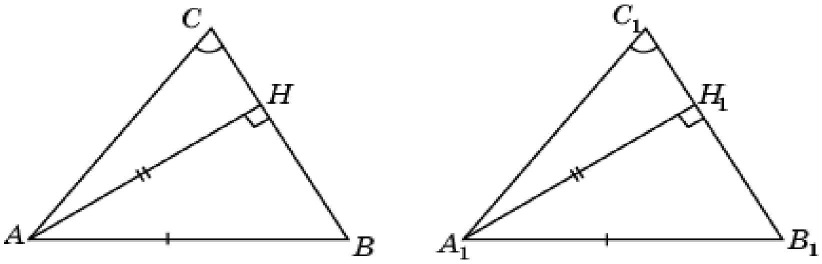


Рис. 4.18

Действительно, прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$, откуда $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Задача 5. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ недостаточно для равенства самих треугольников.

Рассмотрим прямоугольные треугольники ABH и $A_1B_1H_1$, в которых $\angle H = \angle H_1 = 90^o$, $AH = A_1H_1$, $AB = A_1B_1$ (рис.4.19). На продолжениях сторон BH и B_1H_1 отложим неравные отрезки соответственно HC и H_1C_1. Тогда в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1AB= A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, высоты AH и A_1H_1 равны, однако сами треугольники не равны.

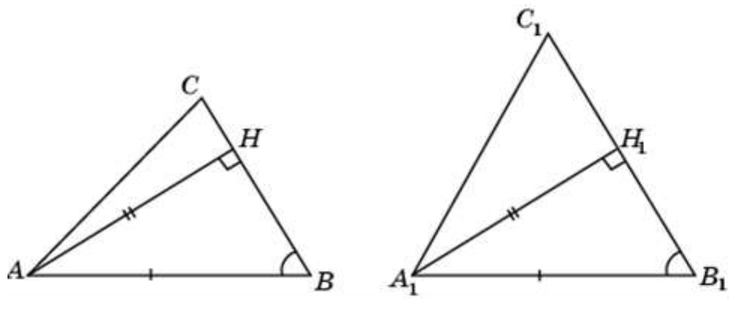


Рис. 4.19

Задача 6. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1, высота BG равна высоте B_1G_1 (рис.4.20). Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

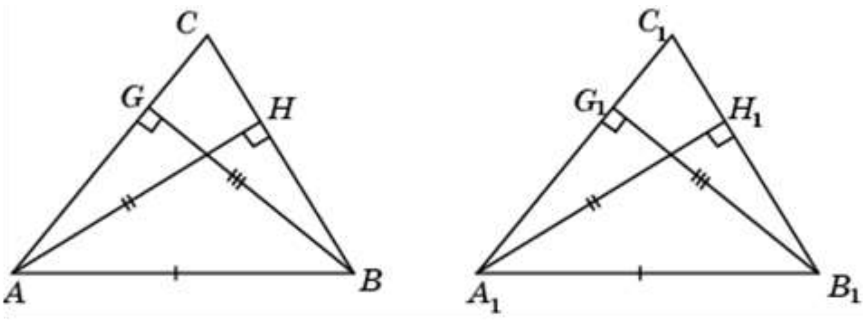


Рис. 4.20

Задача 7.

Действительно, прямоугольные треугольники ABG и $A_1B_1G_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A = \angle A_1$. Аналогично, из равенства треугольников ABH и $A_1B_1H_1$ следует, что $\angle B = \angle B_1$. Таким образом, в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Следовательно, эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Задача 7. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, медиана CM равна медиане C_1M_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис.4.21).

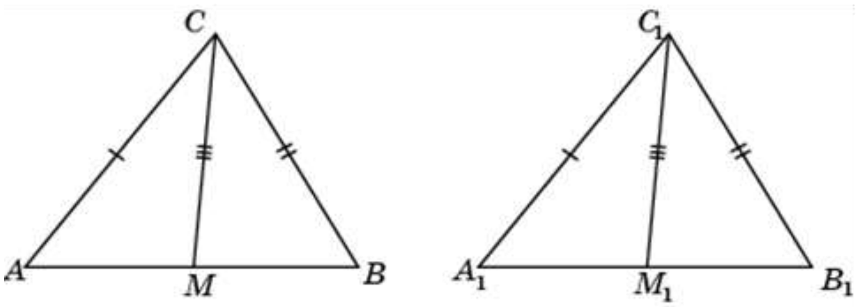


Рис. 4.21

Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$ (рис.4.22).

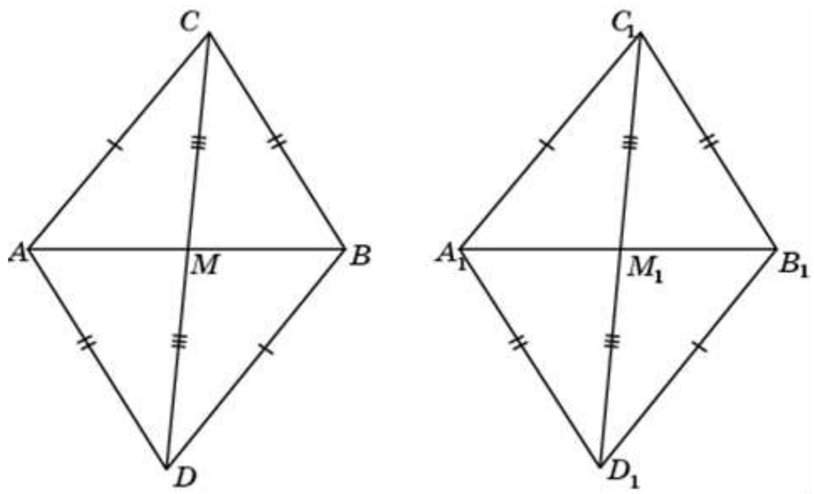


Рис. 4.22

Тогда четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ – параллелограммы. Треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. Аналогично, треугольники BCD и $B_1C_1D_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$. Значит, $\angle C = \angle C_1$ и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Задача 8. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников (рис.4.23).

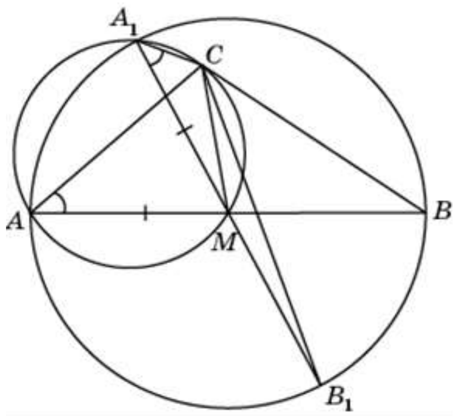


Рис. 4.23

Для этого рассмотрим окружность с центром в точке M. Проведем два диаметра AB и A_1B_1. Через точки A, A_1, M проведем еще одну окружность и выберем на ней точку C, как показано на рисунке. В треугольниках ABC и $A_1B_1CAB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, медиана CM общая. Однако треугольники ABC и A_1B_1C не равны.

Задача 9. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим угол и окружность с центром в вершине A этого угла (рис.4.24). На одной стороне угла отложим отрезок AB и через его середину Kпроведем прямую, параллельную другой стороне и пересекающую окружность в точках M и M_1. Через точку B проведем прямыеBM и BM_1, пересекающие сторону угла соответственно в точках Cи C_1. В треугольниках ABC и ABC_1 угол A общий, AB– общая сторона, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

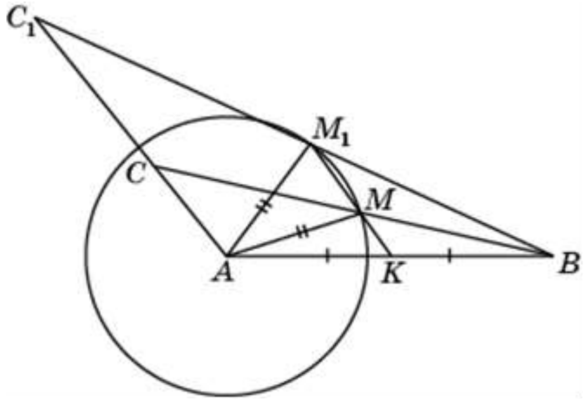


Рис. 4.24

Задача 10.Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников (рис.4.25). Для этого рассмотрим окружность и проведем равные хорды AB и AB_1. Через точку M окружности проведем прямые BM и B_1M и отложим на них отрезки MC и MC_1 соответственно равные BM и B_1M.В треугольниках ABC и $AB_1C_1AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$, медиана AM общая, однако треугольники ABC и AB_1C_1 не равны.

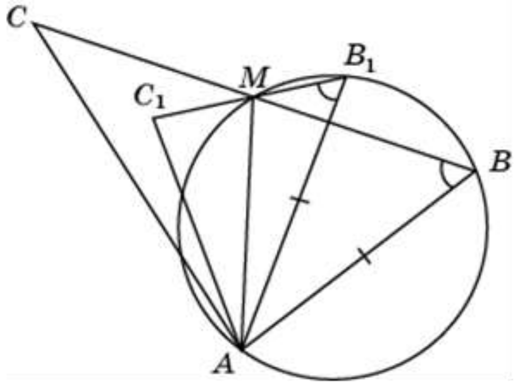


Рис. 4.25

Задача 11. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства самих треугольников. Для этого рассмотрим две равные окружности с центрами в точках O_1 и O_2, касающиеся друг друга в точке M (рис.4.26). Проведем в одной из них хорду AB и прямую AM, пересекающую вторую окружность в некоторой точке C. Проведем отрезок BC. Получим треугольник ABC. Проведем в нем медиану CK и обозначим O точку, делящую ее в отношении 2:1, считая от вершины C. Проведем окружность с центром в точке O радиуса OC, пересекающую вторую окружность в точке C_1. Проведем прямую C_1M и обозначим A_1 точку ее пересечения с первой окружностью. Обозначим K_1 точку пересечения хорды A_1B и прямой C_1O. В треугольниках ABC и A_1BC_1 $\angle A = \angle A_1$, медианы CK и C_1K_1 равны, так как равны отрезки CO и C_1O, соответственно равные двум третям этих медиан, медиана BM общая. Однако треугольники ABC и A_1BC_1 не равны.

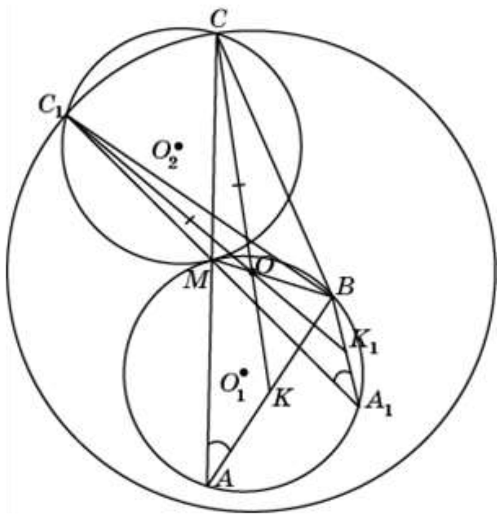


Рис. 4.26

Задача 12. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D_1. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис.4.27).

Продолжим стороны AC и A_1C_1 и отложим на их продолжениях отрезки $CE = BC$ и $C_1E_1 = B_1C_1$. Тогда $BE = CD\dfrac{AE}{AC}$, $B_1E_1 = C_1D_1\dfrac{A_1E_1}{A_1C_1}$.

Треугольники BCE и $B_1C_1E_1$ равны по трем сторонам. Значит, $\angle E = \angle E_1$. Треугольники ABE и $A_1B_1E_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам.

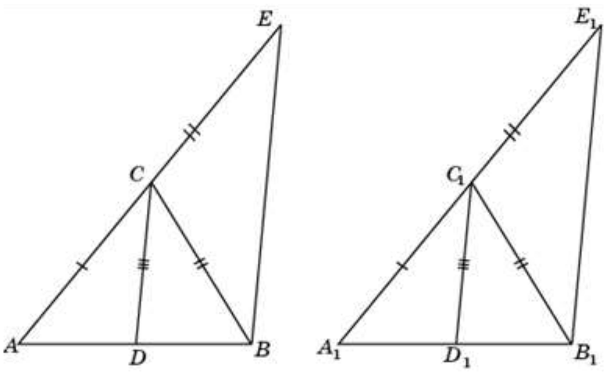


Рис. 4.27

Задача 13. Пример треугольников, изображенных на рисунке (рис.4.28), показывает, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников.

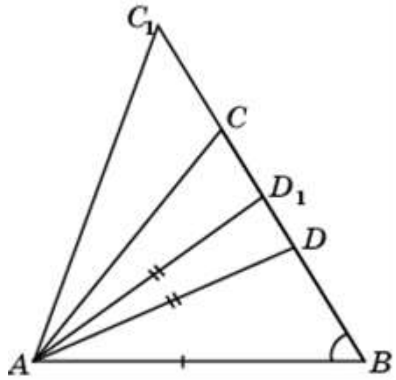


Рис. 4.28

Действительно, в треугольниках ABC и ABC_1 $\angle B$ – общий, AB– общая сторона, биссектрисы AD и AD_1 равны. Однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

Задача 14. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, биссектрисы CD и C_1D_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны. Докажем, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны (рис.4.29).

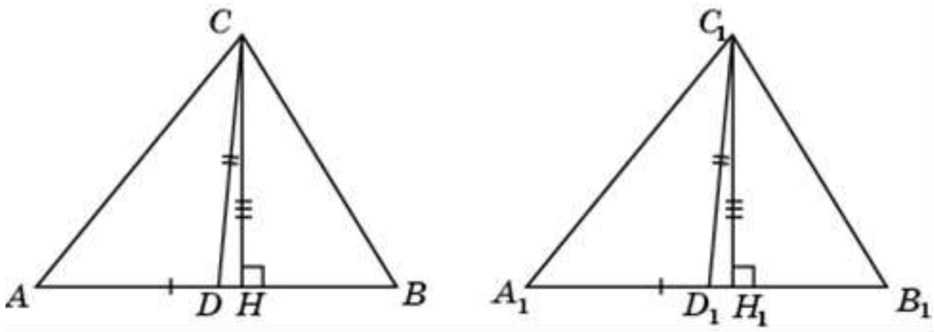


Рис. 4.29

Предположим, что $AC \geq BC$ и $A_1C_1 \geq B_1C_1$. Отложим данные треугольники так, что вершины A и A_1, B и B_1 совпадают, а вершины C и C_1 лежат по одну сторону от AB.Докажем, что если $AC < AC_1$, то биссектриса CD меньше биссектрисы C_1D_1 (рис.4.30).

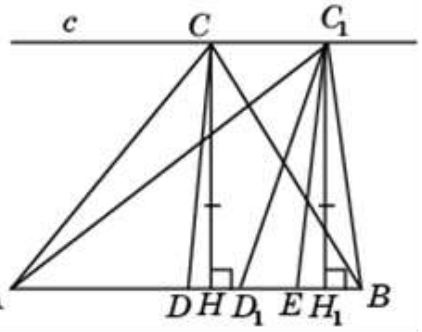


Рис. 4.30

Проведем прямую C_1E, параллельную CD. Угол ACB больше угла AC_1B, угол AC_1E больше угла ACD. Следовательно, угол AC_1E больше угла BC_1E и, значит, точка D_1 лежит между точками A и E. Следовательно, $DH<D_1H_1$ и, значит, $CD<C_1D_1$. Таким образом, из условия равенства биссектрис следует, что вершины C и C_1 должны совпадать и, значит, данные треугольники равны.

Задача 15. Приведем пример, показывающий, что равенство указанных в задаче элементов недостаточно для равенства треугольников. Рассмотрим окружность и угол с вершиной в центре A этой окружности (рис.4.31). Отложим на его стороне отрезок AB, больший диаметра, и через его середину K проведем прямую, параллельную другой стороне угла и пересекающую окружность в некоторых точках M и M_1. Проведем прямые BM, BM_1 и точки их пересечения со стороной угла обозначим соответственно C и C_1. Тогда в треугольниках ABC и ABC_1 сторона AB– общая, высота BH– общая, медианы AM и AM_1 равны, однако треугольники ABC и ABC_1 не равны.

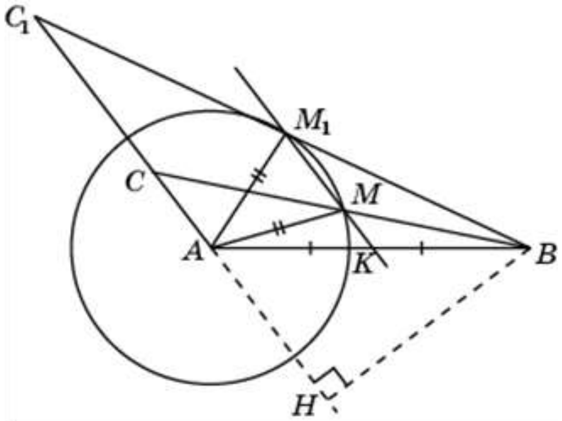


Рис. 4.31